



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Studentská 2, 461 17 Liberec 1

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Ústav mechatroniky a technické informatiky

Autoreferát disertační práce

**Nerovnoměrné rozložení proudové hustoty v třífázové
rozvodné síti**

**Nonlinear Distribution of Current Density in Three-Phase Distribution
Power Net**

Ing. Martin Truhlář

Liberec 2011

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Nerovnoměrné rozložení proudové hustoty v třífázové rozvodné síti

Nonlinear Distribution of Current Density in Three-Phase Distribution Power Net

Ing. Martin Truhlář

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště: Ústav mechatroniky a technické informatiky
Oddělení elektroniky a elektrotechniky
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17, Liberec

Školitel: Prof. Ing. Aleš Richter, CSc.

Abstrakt

Růst produktivity výroby vyžaduje stále vyšší výkony, na které se musí dimenzovat i rozvodny velkých trojfázových proudů. Vysoké proudy však vyžadují rozměrné vodiče umístěné blízko sebe, které se navzájem ovlivňují i při nízkých frekvencích proudů. Je to především nerovnoměrné rozložení proudu ve vodiči způsobené jednak vlastním proudem (skinefekt), jednak proudy v sousedních vodičích (vířivé proudy). Teoretickým i experimentálním studiem tohoto jevu se zabývá tato práce.

V teoretické oblasti jsme odvodili přibližný vztah pro skinefekt v prakticky užívaném vodiči pravoúhlého průřezu. Nedávno byl publikován poněkud jiný vztah. Správnost tohoto vztahu porovnáváme s naším přístupem. Dále jsme vypracovali metodu pro rychlý výpočet vnějšího magnetického pole, které se jeví jako jediná možnost ověření vztahu pro proudovou hustotu ve vodiči. Tato metoda kombinuje analytický vztah a numerickou integraci. Lze ji s úspěchem použít na studium vlivu skinefektu, ale selhává při započítávání vlivu vířivých proudů. Pro tuto kompletní dynamickou úlohu jsme orientačně aplikovali metodu konečných prvků v systému COMSOL Multiphysics.

Cílem experimentu bylo především ověřit vztahy pro skinefekt. Realizovali jsme plně automatizované dynamické měření všech veličin, zejména vektorů magnetického pole, v soustavě tři masivních vodičů pravoúhlého průřezu. Prokázali jsme točivé magnetické pole v okolí vodičů. S cílem omezit vliv vířivých proudů byl ve většině experimentů ve třífázové soustavě vodičů buzen pouze střední vodič. Volbou počáteční fáze v experimentálních datech pak bylo možné odděleně sledovat příspěvek od vířivých proudů a skinefektu. Rovněž bylo měřeno elektrické napětí na povrchu vodiče s cílem ověřit předpoklad konstantního povrchového proudu. Byly jsme však limitovány citlivostí a přesností měřících přístrojů. Takto se ale podařilo experimentálně prokázat nárůst odporu vodiče s rostoucí frekvencí, stejně jako nárůst fázového posuvu mezi proudem a napětím, který se v literatuře obvykle neuvádí.

Vypočtené a naměřené magnetické pole dobře souhlasily pro nízké frekvence, kdy je vliv vířivých proudů malý. Vliv skinefektu se nepodařilo jednoznačně prokázat z důvodu experimentálních chyb. Při nejvyšší frekvenci 1200 Hz teče vodičem malý proud a magnetické pole je slabé. Je to však jen technický problém a již je znám způsob, jak tento proud zvýšit. Započtením vlivu vířivých proudů správnou aplikací softwaru pro metodu konečných prvků lze dosáhnout dobrého souhlasu s experimentem u všech frekvencí ve třífázové soustavě.

Abstract

Industry productivity growth requires even more and more electrical energy. It implicates a need of adequate designed three-phase high current distribution nets. However, high currents require large dimension conductor lines located close to each other that influence themselves even at low current frequencies. High current interaction results in non-uniform distribution of current in conductor line caused by its own current (skin effect) and currents in closely located conductors (eddy currents). Present work deals with theoretical and experimental study of this phenomenon.

Theoretical part derived an approximate formula for skin effect in practical conductor of rectangular cross section. Recently, a different formula was published and we compare its correctness with the results of our study. We developed a method of fast calculation of the external magnetic field, which seems to be the only possibility to verify the formula for current density in a conductor. Our method combines analytic form and numerical integration. It can be successfully used to determine the influence of skin effect, but it fails when the effect of eddy currents is non negligible. To examine complete impact of this dynamic effect we tried to apply the finite element method in COMSOL Multiphysics system.

The aim of the experiment was primarily to verify the formulas of skin effect. We carried out a fully automated dynamic measurement of all variables, especially magnetic field vectors in a system of three large conductor of rectangular shape. We proved a rotating magnetic field around the conductors. Only middle conductor was excited in order to reduce the influence of eddy currents in most experiments in the three-phase conductor system. The contribution of eddy currents and skin effect could be monitored independently through selection of initial current phase in the experimental data. Conductor surface voltage was measured to verify the assumption of constant surface current. However, we were limited by insufficient sensitivity and accuracy of measuring devices. We have been able to experimentally demonstrate an increase in conductor resistance linked with frequency increase and also phase shift between current and voltage, which is not mentioned in related publications.

The calculated and measured magnetic field values correlated well under low frequencies, where the influence of eddy currents is small. Impact of skin effect was not clearly demonstrated due to experimental error. An experimental limitation allows us to use only low current values at high frequencies (1200 Hz) that produce low magnetic field. This is just a technical problem and already a method to increase the current is already known. By correct application of finite element method software we expect the achievement of a good agreement with experimental values at all frequencies in the three-phase system. By correct application of finite element method software and taking in account the impact of eddy currents, we achieve a good agreement with experimental values at all frequencies in the three-phase system.

Obsah

Abstrakt	4
Abstract	5
1 Cíle disertační práce	1
2 Úvod	2
3 Teorie	5
3.1 Skinefekt	5
3.1.1 Alternativní řešení	7
3.2 Magnetické pole	9
4 Experiment	10
4.1 Frekvenční závislost výstupního proudu	12
4.2 Měření magnetického pole	13
4.3 Napětí na povrchu masivního vodiče	15
5 Výpočty	16
6 Výsledky	19
6.1 Frekvenční závislost povrchové proudové hustoty	19
6.2 Měření napětí na povrchu vodiče	20
6.3 Průběh magnetického pole v okolí vodiče	21
6.3.1 Časová oblast	22
6.3.2 Vliv okolí	24
6.3.3 Vířivé proudy	25
6.3.4 Porovnání s experimentem	28
6.4 Trojfázové magnetické pole	29
7 Diskuse	30
8 Závěr	33
Literatura	35
Vlastní publikace	37

1 Cíle disertační práce

Disertační práce vychází ze současného stavu poznání v oblasti povrchových jevů v elektromagnetizmu a důsledně přihlíží k technickým požadavkům praxe. Z hlediska rozvoje všeobecného poznání jde především o systematické studium povrchových jevů ve vodičích složitějšího průřezu. Z hlediska praxe to jsou problémy, které vznikají v nízkonapěťových sběrnicích při vysokých proudových zatíženích:

- Jedním z problémů je nerovnoměrné rozložení proudu ve vodiči. Povrchový jev má za následek nadměrné zahřívání povrchu. Proto je nutné tyto sběrnice chladit.
- Dalším problémem je volba profilu vodičů. Z ekonomických důvodů se hledají optimální profily tak, aby docházelo k maximálnímu využití mědi a přitom umožnily snadnou a rychlou montáž. Bohužel se už nebere takový ohled na vedlejší jevy, které tímto přístupem vznikají.
- Při konstrukci se berou málo v úvahu přechodné jevy při zapínání a vypínání velkých výkonů, nebo při havarijním stavu. Pak mohou krátkodobě téct proudy mnohonásobně převyšující ustálený stav, na který je rozvodna navržena. Tyto proudy vyvolávají silné pulsní magnetické pole, které může vést ke značným nárazovým silám mezi vodiči.

Na základě těchto požadavků můžeme formulovat základní cíle disertační práce.

- V oblasti teorie se jedná zejména o toto:
 - Nalézt komplexní řešení rovnic pro povrchové jevy ve velmi jednoduchých prostředích. Komplexním řešením se rozumí získat nejen průběh proudové hustoty, ale i buzeného magnetického či elektrického pole.
 - Pokusit se nalézt přibližné analytické řešení rovnic pro skinefekt ve vodiči s pravoúhlým profilem.
 - Protože veličiny, zejména proudová hustota, v předchozích dvou bodech jsou vypočteny uvnitř vodiče, nelze je měřit. Relativně snadno lze však měřit vnější magnetické pole. Proto je nutno formulovat vztahy pro jeho výpočet na základě rozložení proudové hustoty uvnitř vodiče. Pro urychlení výpočtu by tyto vztahy, nebo alespoň jejich část, měly být analytické.
- V oblasti experimentu jde zejména o ověření teoretických výsledků a získání základních poznatků o experimentálním modelu trojfázové rozvodny. Především jde o tato základní měření:
 - Zprovoznit existující aparaturu, aby bylo možno provádět komplexní automatizovaná měření. Komplexním měřením se rozumí měření všech významných obvodových veličin v časové oblasti. Měření v časové oblasti vyžaduje plnou automatizaci, tj. řízení počítačem, jak z hlediska podnětu, tak zejména z hlediska odezvy.
 - Měření indukce vnějšího magnetického pole, které umožní ověřit teoretický výpočet rozložení proudové hustoty ve vodiči.
 - Měření napětí na povrchu vodičů s cílem získat představu o jeho rozložení.

- Z hlediska výpočtů se práce soustředí na tyto oblasti:
 - Základní zpracování výstupních dat s cílem jejich synchronizace a získání věrohodných údajů.
 - Výpočet všech parametrů povrchového jevu popsaného přesnými nebo přibližnými analytickými vztahy.
 - Výpočet magnetického pole v okolí vodičů analyticky nebo numerickou integrací.
 - Simulace modelu použitím metody konečných prvků pro ty případy, kdy numerické integrace nelze použít.
- Z hlediska aplikace výsledků:
 - Výpočtem získané výsledky z matematického modelu budou porovnávány s experimentálními výsledky. Z těchto výsledků by měla vzejít nová koncepce proudových sběrnic.
 - Základním úkolem je nalézt takové řešení, aby povrchové jevy byly co nejvíce potlačeny.

2 Úvod

Současná tendence v technice je zvyšovat výkon a snižovat rozměry. To platí i pro oblast rozvođen elektrické energie. Zvyšování výkonu si vynucuje rostoucí produktivita práce a používání některých nových či ekologických technologií. Snižování rozměrů jde ruku v ruce s požadavkem úspor, v našem případě drahé mědi. Obě tyto skutečnosti a některé další vedou k problémům, které je nutno studovat a na základě výsledků studia přijímat vhodná opatření.

Při řešení problémů trojfázových rozvođen s vysokými proudy je nutno se zabývat především otázkou vzájemné elektromagnetické interakce vodičů. Vodiči se přenáší velký proud, mají tedy poměrně velký průřez. I při technických frekvencích se může díky velkému průřezu uplatnit skinefekt. Protože vodiče trojfázové soustavy jsou navíc blízko sebe (s cílem úspor místa), lze očekávat, že se v nich indukují silné vířivé proudy. Oba jevy, ale zejména vířivé proudy, vedou k nerovnoměrnému rozložení proudu ve vodičích, proud je vytlačován k povrchu. To může způsobit přehřívání povrchových částí vodičů.

Silné proudy vyvolávají silné magnetické pole, takže mezi blízko umístěnými vodiči mohou vznikat značné vzájemné síly. Tyto síly mohou překročit únosnou mez v případě přechodných jevů. K nim dochází např. při zapínání a vypínání velkých spotřebičů nebo při haváriích. V těchto případech tečou několikanásobně vyšší proudy než v ustáleném stavu.

Respektovat skinefekt a vířivé proudy je klíčovým úkolem, jehož řešení umožní analýzu návrhu či realizace rozvodny. Při tom jde o poměrně složité jevy v reálném systému. S ohledem na jejich důležitost, oba tyto jevy by měly být studovány teoreticky a experimentálně ověřeny. V této úvodní části nastíníme, co se již udělalo ve světě, s jakými rozvodnami se setkáváme a co je třeba v jejich problematice ještě dořešit.

Problematika vířivých proudů v obecné poloze je elektromagnetizmu známa v podstatě již od vzniku teorie elektromagnetického pole [4], [5]. V různém rozsahu se objevuje i v dnešních monografiích v češtině [1], [2]. Obdobně je tomu i v nejnovějších cizích monografiích, např. [3]. V technicky zaměřených monografiích, např. [1], je zejména skinefektu věnována přiměřená část.

Podrobnější analytické řešení se pochopitelně omezuje jen na nejjednodušší případ, harmonický proud ve vrstvě, který je v technické praxi splnitelný jen velmi přibližně. Další analytické řešení je vodič kruhového průřezu. Zde se však používají méně známé Besselovy funkce, i když v MATLABu se s nimi dá pracovat stejně jako s elementárními funkcemi.

Existují i speciální monografie zaměřené na tyto jevy. V češtině to je již starší teoretická kniha [7], která je však zaměřena spíše do oblasti mikrovln. Kniha v angličtině ze stejného období [6] je rovněž teoretická, i když je v ní načrtnut průběh skin efektu v trojfázové rozvodné soustavě. Protože v té době byly numerické výpočty velmi náročné, kvantitativních informací je v ní málo.

Publikace v časopisech, zejména z posledního období jsme vyhledávali pomocí prohlížečů odborné literatury na internetu. I když jsme se snažili použít univerzální klíčová slova ve velkém logickém rozmezí, výsledků vyhledávání bylo poměrně málo. Dále se o nich stručně zmíníme.

Informace ve zjištěné novější časopisecké literatuře se obvykle týkají řešení technických problémů s vířivými proudy, případný výpočet je spojen s aplikací integrálních vztahů nebo použitím metody konečných prvků. Lze je rozdělit do tří (nikoli disjunktních) oblastí: Kontrola rozvodny ([12], [13]), redukce vlivu vířivých proudů na oteplování vodivých objektů ([14], [16], [17] [18]) nebo naopak jejich efektivní využití v pecích [19]. Částečně se používají integrální vztahy, částečně diferenciální rovnice vedoucí k aplikaci metody konečných prvků.

Převážně experimentální práce [12] se týká trojfázové rozvodny používající plochých vodičů umístěných blízko sebe. Konečné řešení je v publikaci [13]. Protože se jedná o napětí řádu kV a proudy tisíců ampér, místo standardních proudových transformátorů se navrhuje použití optických transformátorů proudu. Ty v principu měří indukci magnetického pole prostřednictvím magnetooptického jevu a z její velikosti určují budící proud. Mohou být jak v objemovém, tak tenkovrstvém provedení. Hlavním problémem, který zkresluje měření, jsou vířivé proudy. Uvažuje se několik možností uspořádání magnetooptického senzoru. Provádí se pak kvalitativní rozbor, které řešení nejvíce omezí vířivé proudy. Nebudeme přecházet do podrobností, v závěru se uvádí, že optimálním řešením je dvojnásobné stínění.

Vliv vířivých proudů na oteplení pravoúhlé tyče se uvažuje v průkopnické práci [14]. Uvažuje se dopadající časově proměnné magnetické pole na nekonečný nemagnetický vodič pravoúhlého průřezu. Výsledkem jsou integrální vztahy pro výpočet výkonových ztrát s cílem snížit je. Naopak práce [15] se zabývá indukčním ohřevem, tedy využitím vířivých proudů ve velice speciální problematice supravodivosti. Ohřevem vlivem vířivých proudů se zabývá též práce [16]. Zde se jedná o vznik vířivých proudů ve stěně nádoby transformátoru v rozvodně, pokud jsou dráty s velkým proudem vedeny blízko ní. Při řešení se opět používá integrálního přístupu.

Analytické vztahy pro ohřev hliníkové desky nekonečné plochy a konečné či nekonečné tloušťky, v jejíž blízkosti jsou vodiče přenášející silný proud, jsou v práci [17]. V tomto jednoduchém případě jsou odvozeny analytické vztahy pro elektromagnetické veličiny z Maxwellových rovnic a okrajových podmínek. Ze získaných složitých vztahů lze vypočítat ztráty.

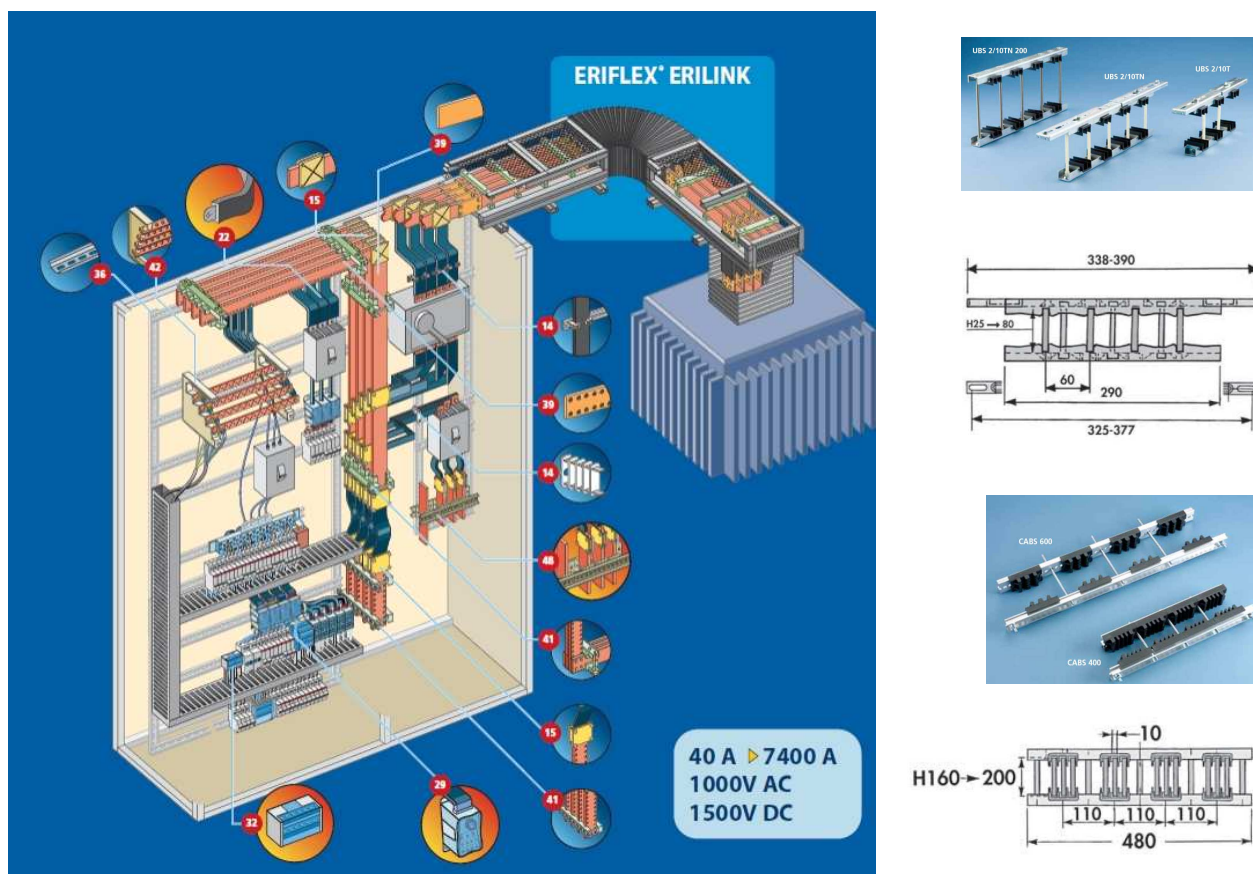
Kromě integrální formulace se využívá i formulace diferenciální. Výpočtem ztrát vířivými proudy ve výkonových transformátorech se zabývá práce [18]. K výpočtu rozložení elektromagnetických veličin a ztrátového výkonu používá metodu konečných prvků. Aplikací metody konečných prvků na rozložení elektromagnetických veličin v obloukové peci se zabývá poměrně stará práce [19]. Diskuse správné aplikace metody konečných prvků a různé možnosti formulace základních parametrů úlohy pro vířivé proudy a skin efekt je smyslem práce [11].

Pokud jde o přibližné analytické řešení skin efektu ve vodiči poněkud speciálního průřezu, kterým je již pravoúhlý průřez, jsou informace v literatuře sporadické. V češtině to je především

článek [8], který podrobně popisuje skinefekt a dává kvalitní podklady pro numerické řešení.

Pro tuto práci byla však klíčová nedávná publikace [9], kde se vychází z řešení dvou jednorozměrných parciálních diferenciálních rovnic¹ pro dvě souřadné osy a jako řešení příslušné dvourozměrné diferenciální rovnice se použije jejich součin. O tomto přístupu, který je velmi podobný našemu řešení, se podrobněji zmíníme ještě později jak v teoretické části, tak v popisu experimentu 4 a nakonec v diskusi 7.

Jako příklad praktické aplikace zmíníme firmu Erico, která nabízí modulární systémy do proudového zatížení 7200 A. Realizace je na obr. 1.



Obrázek 1: Rozvodný systém firmy Erico

Z tohoto přehledu literatury (a náznaku realizace), který možná není úplný, ale asi jej lze považovat za reprezentativní, vyplývá, že teoretické studium povrchových jevů v elektromagnetismu se omezuje jen na nejjednodušší případy, zpravidla uváděné v učebnicích. Ve složitějších případech, ke kterým patří již i vodič s pravoúhlým profilem, je nutno použít přibližné, obvykle numerické, řešení. Tato práce se snaží modelovat jevy v realizovaných rozvodnách. V teorii hledá model, který lze alespoň přibližně popsat analyticky a určit všechny jeho vlastnosti. Na experimentálním modelu pak teorii ověřuje².

¹Jendorozměrná parciální diferenciální rovnice obsahuje druhou derivaci podle souřadnice a času.

²Některé obrázky jsou ve zmenšení špatně čitelné. Pak je možno si prohlédnout verzi ve formátu pdf na webové stránce <http://www.fm.tul.cz/dokgrant/cs/prispevky.html>.

3 Teorie

Časově proměnné elektromagnetické pole při nízkých frekvencích nazýváme kvazistacionární elektromagnetické pole. Jeho základním rysem je to, že všechny body tohoto pole ve vyšetřované oblasti mají stejnou fázi, což znamená, že elektromagnetická vlna se šíří nekonečnou rychlostí (v této oblasti). Fyzikální podmínkou pro tento model je to, aby rozměry oblasti byly podstatně menší než vlnová délka elektromagnetické vlny ve vakuu. Při technických frekvencích, se kterými v této práci pracujeme, je tato podmínka bezpečně splněna.

Základem pro fyzikální analýzu dějů kvazistacionárního elektromagnetického pole je zákon elektromagnetické indukce, který má v diferenciální formě Maxwellových rovnic tvar

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

kde symbolem $\vec{B}$ je označena budící časově proměnná magnetická indukce a $\vec{E}$ je intenzita buzeného elektrického pole jako odezva.

Obecný fyzikální význam zákona elektromagnetické indukce (1) je tento: Časově proměnné vnější magnetické pole budí (časově proměnné) elektrické pole s uzavřenými siločárami. Toto pole existuje všude, v jakémkoliv prostředí, ve vakuu, dielektriku i ve vodiči. Nazveme je vířivé elektrické pole, správněji by mělo být vírové elektrické pole.

Protože se jedná o kvazistacionární elektromagnetické pole, elektrické pole ve vakuu a dielektriku nebudí magnetické pole. Pokud je ale prostředím vodič, v němž není přímo buzen elektrický proud, vířivé elektrické pole v něm budí vířivé proudy. Jejich orientace se zjistí např. podle Lenzova pravidla, které lze formulovat takto: Indukovaná veličina má takovou orientaci, že se svými účinky snaží zabránit změně, která ji vyvolala. Lenzovo pravidlo je důsledek znaménka mínus v zákonu elektromagnetické indukce (1).

Indukované vířivé proudy ve vodiči budí vnitřní magnetické pole. Podle Lenzova pravidla je toto pole orientováno tak, že působí proti vnějšímu poli a snaží se je snížit. Výsledné magnetické pole, vzniklé složením vnějšího budícího a vnitřního indukovaného pole, je tedy slabší než pole původní.

Vířivé proudy vznikají ve vodiči vždy, pokud je přítomno časově proměnné magnetické pole. Nyní uvažujeme složitější případ, že vodičem prochází časově proměnný proud buzený časově proměnným elektrickým polem, jehož napěťový zdroj je mimo vyšetřovanou oblast vodiče. Časově proměnný elektrický proud budí magnetické pole a toto magnetické pole vytváří podle rovnice (1) vířivé elektrické pole a tím i vířivý elektrický proud. Tento vířivý elektrický proud jako odezva na budící proud působí opět proti budícímu proudu a snaží se jej snížit. Tento případ nazveme skinefekt.

Toto rozlišování na vířivé proudy a skinefekt není zcela přesné, protože vždy se jedná o vířivé proudy a jejich interakce. Má však nesporný praktický význam a v této práci je chápeme jako užitečné pracovní termíny.

3.1 Skinefekt

Lze ukázat, že elektromagnetické veličiny jsou při průchodu vodičem tlumeny. Existují jen v blízkosti jeho povrchu. Proto se často mluví o povrchovém jevu. Je zřejmé, že čím bude vyšší frekvence budícího pole, tím bude útlum ve vodiči větší. Připomeňme, že v běžné technické literatuře nebývá skinefekt popsán dostatečně přesně. Obvykle se uvádí, že při vysokých frekvencích:

- Proud teče po povrchu vodiče.
- Proud teče v tenké povrchové vrstvě.
- Proud prudce klesá směrem do vodiče.

Disertační práce podrobně popisuje úplné analytické řešení skinefektů a vířivých proudů pro nejjednodušší prostředí. Zde pouze uvedeme, že proudová hustota je obecně komplexní funkcí a fyzikální význam má její reálná či imaginární složka. Již v případě vrstvy má pokles proudové hustoty směrem dovnitř oscilující charakter. V některých oblastech ve větší hloubce teče malý proud opačným směrem. Při použití komplexní symbolické metody, tj. popis pomocí amplitudy a fáze, se ukazuje, že mezi proudovou hustotou a intenzitou budícího elektrického pole je fázový posuv.

Jako nový výsledek zde uvedeme odvození přibližného analytického vztahu pro skinefekt v nekonečné tyči. Předpokládáme, že obdélníkový vodič má šířku $2a$ ve směru osy X a šířku $2b$ ve směru osy Y , čili průřez vodiče je umístěn v rovině XY . Proud protéká ve směru osy Z . Kritickým místem je formulace okrajových podmínek. Pro jednoduchost předpokládáme, že proudová hustota má konstantní hodnotu i_o na povrchu tyče. To je splněno pro stejnosměrný proud, a tedy přibližně i pro nízké frekvence. Proto mluvíme o přibližném analytickém vztahu.

V práci je odvozen tento přibližný vztah pro proudovou hustotu uvnitř pravoúhlé tyče

$$i(x, y) = -i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y)}{\cosh(\hat{\delta}a) \cosh(\hat{\delta}b)} + i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}x)}{\cosh(\hat{\delta}a)} + i_o \frac{\cosh(\hat{\delta}y)}{\cosh(\hat{\delta}b)}, \quad (2)$$

kde

$$\hat{\delta} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}, \quad (3)$$

je komplexní útlumová konstanta, $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence, f je frekvence, μ je permeabilita vodiče a γ jeho elektrická vodivost. Dosazením $x = a$ nebo $y = b$ do výsledného řešení (2) se přesvědčíme, že okrajové podmínky jsou splněny.

Celkový proud tyči $\hat{I}$ spočítáme integrací proudové hustoty (2) přes průřez tyče

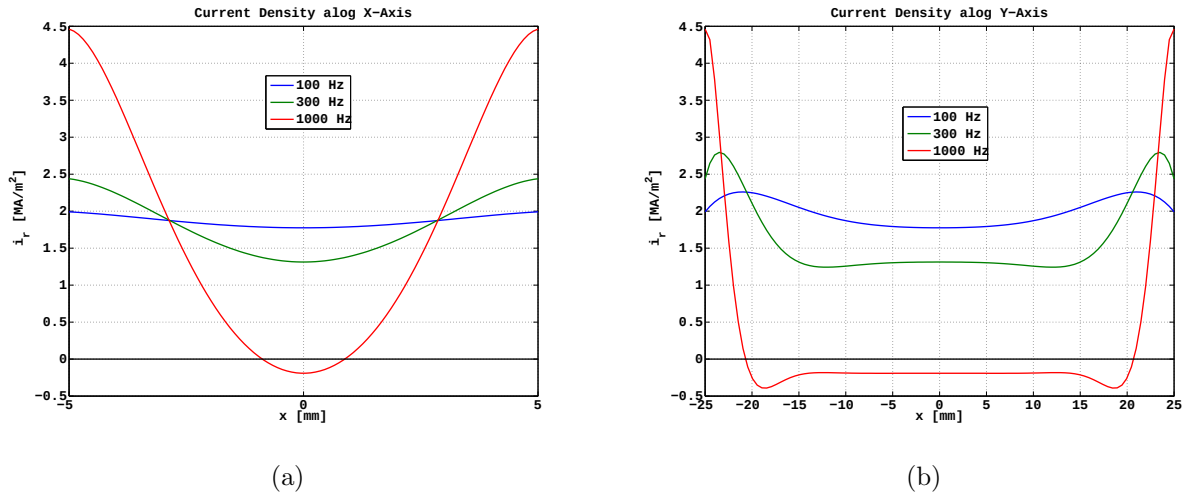
$$\hat{I} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b i(x, y) dx dy = i_o \frac{2}{\hat{\delta}^2} [-2 \operatorname{tgh}(\delta a) \operatorname{tgh}(\delta b) + \delta \operatorname{tgh}(\delta a) + \delta \operatorname{tgh}(\delta b)]. \quad (4)$$

Naopak, je-li zadán celkový proud v tyči, což je praktický případ, proudovou hustotu i_o ve vztahu (2) vypočítáme podle vztahu

$$\hat{i}_o = I \frac{\hat{\delta}^2}{2 [-2 \operatorname{tgh}(\delta a) \operatorname{tgh}(\delta b) + \delta \operatorname{tgh}(\delta a) + \delta \operatorname{tgh}(\delta b)]}. \quad (5)$$

Ve vztazích se na první pohled může zdát neshoda v tom, že někdy je proudová hustota reálná, vztah (4), jindy komplexní, vztah (5). Pro celkový proud je tomu naopak. Ve skutečnosti je vše v pořádku, zadávanou veličinu (nezávisle proměnnou) volíme reálnou, vypočtená veličina je pak komplexní.

Pro ilustraci uvádíme základní výsledky. Předpokládáme měděnou tyč šířky 10 mm ve směru osy X a výšky 50 mm ve směru osy Y , kterou protéká celkový proud 1000 A. Frekvence je parametrem. Průběh proudové hustoty podél základních os je na následujících obrázcích. Na



Obrázek 2: Průběh proudové hustoty v pravoúhlé tyči pro různé frekvence, a) podél osy X , b) podél osy Y

obr. 2a je průběh proudové hustoty podél osy X . Pro nízké frekvence je rozložení proudové hustoty téměř rovnoměrné, pro vysoké frekvence je proud vytlačován směrem k okrajům, kde dosahuje maxima. Neočekávaným výsledkem je to, že při nejvyšší frekvenci teče uprostřed tyče proud opačným směrem.

Na obr. 2b je průběh proudové hustoty podél osy Y . Protože je nyní rozměr pětikrát větší než předchozí, povrchový jev je výraznější. S rostoucí frekvencí je proud stále více vytlačován k okrajům. Maxima však nedosahuje na okrajích tyče, ale v jejich blízkosti. To je zřetelné pro nižší frekvence. Rovněž tak uprostřed vodiče nemusí být nutně minimum proudové hustoty. Nejpodstatnější, a zároveň nejméně očekávaný, je ale výsledek, že při vysoké frekvenci teče proud v dosti široké oblasti kolem osy vodiče opačným směrem. Tento proud je ale poměrně slabý.

Již tyto základní obrázky ukazují, že průběh proudové hustoty v tyči je dosti komplikovaný a nemusí plně odpovídat vžitým představám, které jsme uvedli na počátku této kapitoly.

3.1.1 Alternativní řešení

V práci [9], která se objevila nedávno, je v principu povrchový jev počítán podle analogických výchozích rovnic, avšak výsledné vztahy mají tvar

$$\hat{i}(x, y) = I \frac{\hat{\delta}_x \hat{\delta}_y \cosh(\hat{\delta}_x x) \cosh(\hat{\delta}_y y)}{4 \sinh(\hat{\delta}_x a) \sinh(\hat{\delta}_y b)}, \quad (6)$$

kde I je celkový proud tekoucí tyčí. Koeficienty³ $\hat{\delta}_x$ a $\hat{\delta}_y$ musí splňovat podmínku

$$\hat{\delta}_x^2 + \hat{\delta}_y^2 = j\omega\mu\gamma. \quad (7)$$

Porovnáme tento výsledek s naším řešením (2), ve kterém ponecháme pouze součin hyper-

³Na rozdíl od našeho řešení to nejsou útlumové konstanty.

bolických funkcí a pro toto řešení použijeme celkový proud I . Dostaneme vztah

$$\hat{i}_r(x, y) = I \frac{\hat{\delta}^2}{4} \frac{\cosh(\hat{\delta}x) \cosh(\hat{\delta}y)}{\sinh(\hat{\delta}a) \sinh(\hat{\delta}b)}, \quad (8)$$

Je zřejmé, že položíme-li

$$\hat{\delta}_x = \hat{\delta}_y = \hat{\delta} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}, \quad (9)$$

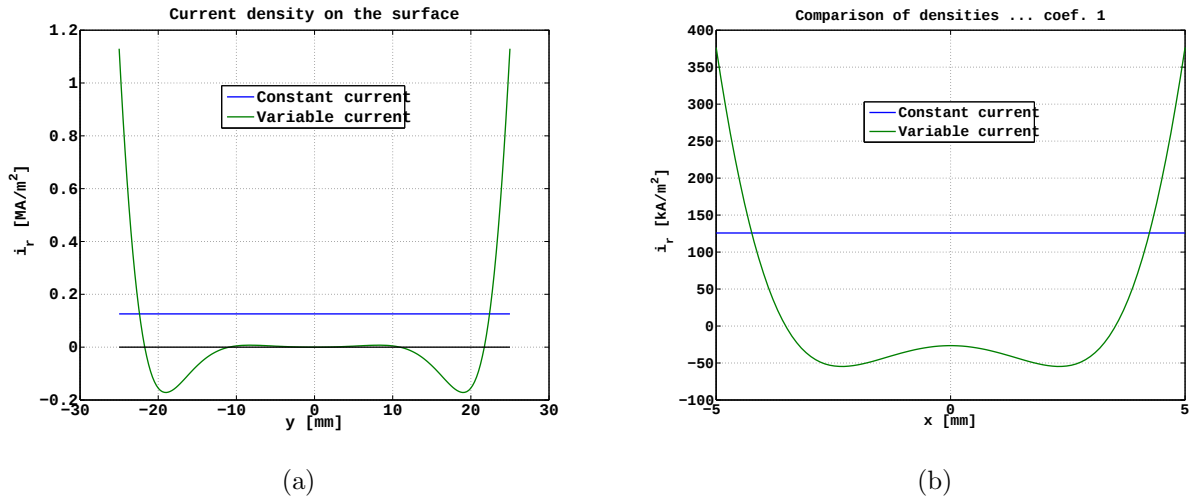
obě řešení (6) a (8) jsou identická. Je splněna i podmínka (7). K tomuto výsledku se v práci [9] dochází v případě čtvercového průřezu.

Pro tyč obdélníkového průřezu jsou v práci [9] odvozeny přibližné vztahy pro útlumové konstanty $\hat{\delta}_x$ a $\hat{\delta}_y$

$$\hat{\delta}_x = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} \sqrt{\frac{2b}{a + b}}, \quad \hat{\delta}_y = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} \sqrt{\frac{2a}{a + b}}. \quad (10)$$

Je v nich tedy započten průřez vodiče, i když bezrozměrně.

Porovnání výsledků z obou teorií pro povrch vodiče, kde je rozdíl největší, je pro vodič s obdélníkovým průřezem 10 x 50 mm na obr.3. Výsledky podle naší teorie jsou označeny jako konstantní (povrchový) proud, podle druhé teorie se jedná o proměnný (povrchový) proud. Průběh podél svislé strany o výšce 50 mm je na obr. 3a, pro vodorovnou stranu o šířce 10 mm je na obr. 3b.



Obrázek 3: Proudová hustota na povrchu vodiče: a) svislá strana, b) vodorovná strana

Podle teorie proměnného proudu, obr. 3a, má proudová hustota na povrchu vodiče dosti neobvyklé projevy. Proudová hustota by se měla měnit velmi prudce v blízkost hrany, v části povrchu by měl proud téct opačným směrem a ve střední části povrchu by prakticky neměl téci vůbec.

Obdobný průběh proudové hustoty lze vypočítat i pro vodorovný povrch tyče na obr. 3b. Proudová hustota opět prudce klesá směrem od hrany a v poměrně rozsáhlé střední části by měl proud téct opačným směrem. Proud je soustředěn jen v blízkosti hrany. Na ní je navíc proudová hustota nespojitá, jednostranná limita ve směru výšky se liší od limity ve směru šířky.

3.2 Magnetické pole

Průběh všech veličin ovlivněných skinefektem nebo vířivými proudy lze analyticky vypočítat uvnitř vodiče pro jednoduché, v praxi přibližně použitelné, případy. Protože se žádná sonda nemůže dostat pod povrch vodiče, není možno vypočtené průběhy ověřit přímo. To se týká jak skinefektu, tak vířivých proudů. Tento problém je i u jiných oblastí fyziky, např. podle teorie existuje v kapalinách obrovský vnitřní tlak. Ten však nemůžeme ze stejných důvodů změřit. Jeho existenci lze však ověřit z některých jeho důsledků.

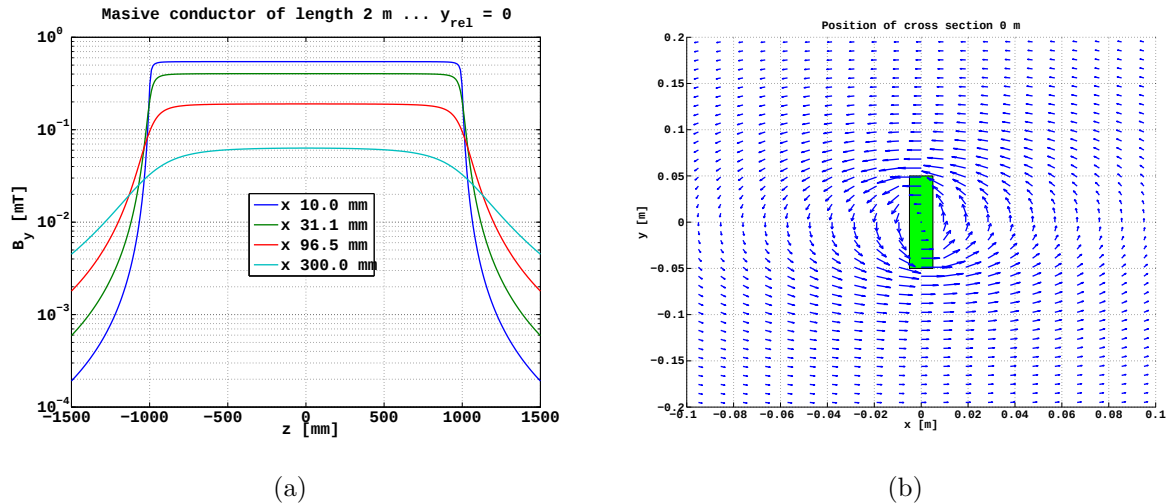
U skinefektu je situace obdobná. Důkazem jeho existence je růst odporu vodiče se zvyšující se frekvencí. K ověření vypočtených průběhů to však nestačí. Nejjednodušší způsob je použít přesné měření vnějšího magnetického pole studovaného vodiče. V důsledku skinefektu není proud ve vodiči rozložen rovnoměrně, je soustředěn blízko jeho povrchu. Vnější magnetické pole bude mít tedy pro střídavý proud dostatečně vysoké frekvence jiný průběh než pro stejnosměrný proud, který je ve vodiči rozložen rovnoměrně.

Pro ověření analytických výsledků je tedy důležité umět spočítat (a přesně změřit) průběh magnetického pole vně vodiče. K výpočtu magnetické indukce pomocí Biot-Savartova zákona v okolí masivního vodiče nelze nalézt obecný analytický vztah, je nutno použít numerické integrace. Naštěstí pro přímý masivní vodič existuje analytický vztah pro integraci podél jeho délky, takže numerická integrace se vztahuje pouze na jeho průřez. V práci jsme kombinací obou metod odvodili pro složky magnetické indukce v okolí masivního vodiče se šířkou $2a$ ve směru osy X , výškou $2b$ ve směru osy Y a délkou $2L$ ve směru osy Z , kterým protéká proud o proudové hustotě $i_o(x, y)$ ve směru osy Z , vztah

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b i_o(x_d, y_d) \frac{y - y_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] dx_d dy_d, \\
 B_y(x, y, z) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b i_o(x_d, y_d) \frac{x - x_d}{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \\
 &\quad \left[\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + K_{xy}}} - \frac{z + L}{\sqrt{(z + L)^2 + K_{xy}}} \right] dx_d dy_d, \\
 B_z(x, y, z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Pokud je proud ve vodiči rozložen rovnoměrně, získá se proudová hustota $i_o(x_d, y_d)$ tak, že celkový proud vydělíme průřezem vodiče. Obecný postup předpokládá integraci přes objem. Proto je tato metoda minimálně o řád rychlejší při výpočtech. Délka vodiče je totiž jeho největší rozměr, a tak vyžaduje nejvíce elementů. Praktické porovnání ukazovalo urychlení téměř 3000 krát. Vztah (11) byl použit téměř při všech výpočtech magnetické indukce.

Pro ilustraci uvádíme na obr. 4a průběh magnetické indukce drátu s průřezem 10×50 mm, kterým protéká stejnosměrný proud 1000 A. Průběh je podél přímky rovnoběžné se směrem proudu (osa Z), která leží v různé vzdálenosti od osy vodiče. Tuto vzdálenost udává parametr. Je použita logaritmická stupnice pro magnetickou indukci. Je zobrazena pouze složka magnetické indukce B_y , složka B_x je v rovině $y = 0$ nulová. Podél drátu a v jeho relativní blízkosti je indukce téměř konstantní, za jeho konci prudce klesá. Fyzikálně tento případ není realizovatelný (proud začíná a končí), nicméně dobře popisuje průběh magnetické indukce pro polohy, které nejsou příliš blízko okrajů vodiče.



Obrázek 4: Magnetické pole masivního vodiče: a) průběh svislé složky indukce podél podélné osy, b) indukční čáry v rovině kolmé k ose vodiče

Poněkud názornější průběh magnetické indukce ve vektorové formě je na obr. 4b. Jde o tentýž případ jako na předchozím obrázku. Vektory jsou v hlavní rovině $z = 0$. Obrázek odpovídá fyzikálním představám. Na obrázku je zajímavý zrakový klam. Zdá se, že mřížka není pravoúhlá, ale nepravidelná, případně místy zešikmená. Pokud však pozorně sledujeme počátky vektorů, o pravidelnosti a pravoúhlosti mřížky není pochyb.

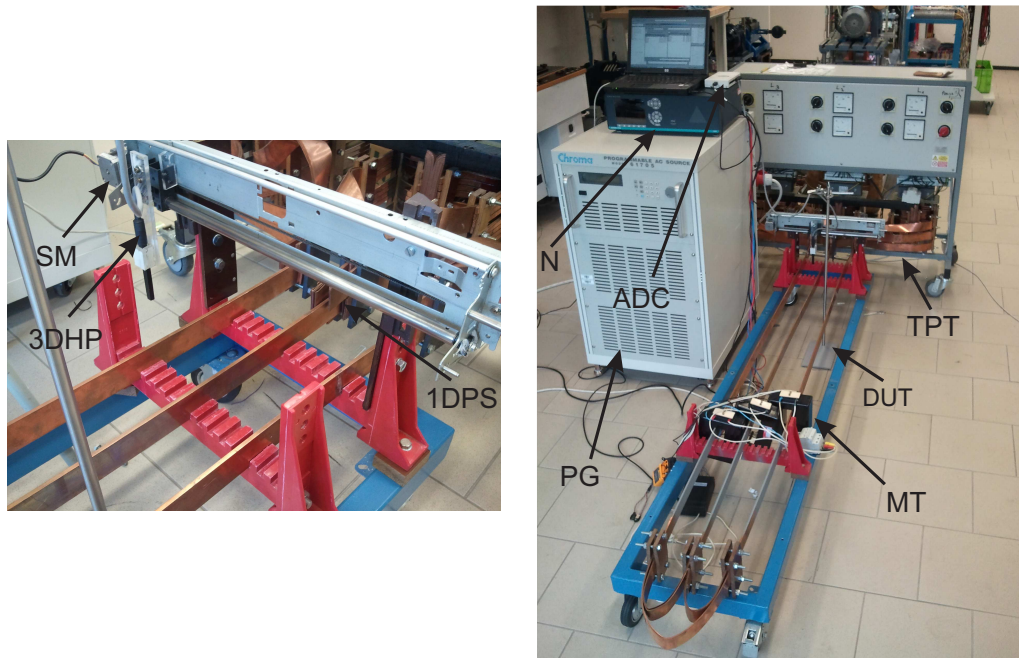
4 Experiment

Jediným jednoduchým způsobem, jak prokázat vliv skin efektu a vířivých proudů, je měření magnetického pole v okolí masivního vodiče. To bylo provedeno na aparatuře, kterou zde popíšeme. I když měření magnetického pole v okolí vodičů je klíčovým měřením, aparatura byla použita i k základnímu měření obvodových veličin a napětí na povrchu vodičů. Protože se jednalo o měření v časové oblasti, bylo nutno měření automatizovat.

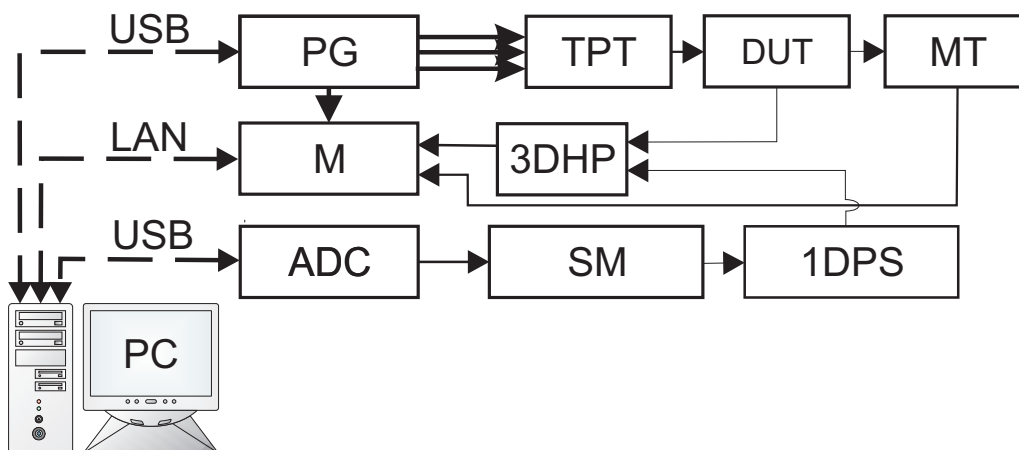
Obrázek 5 nám představuje celkový pohled na měřicí aparaturu a následující obrázek 6 blokové schéma zapojení jednotlivých měřících přístrojů. Jako zdroj použijeme programovatelný zdroj Chroma 61704 (PG), který je napájen z třífázové rozvodné sítě. Tento zdroj je připojen přes převodník GPIB/USB k počítači. Třífázový výstup z programovatelného zdroje je připojen na vstup proudových transformátorů (TPT), protože potřebujeme získat velké proudy na sekundáru. Tyto transformátory lze na primární straně zapojovat buď do hvězdy, nebo do trojúhelníku podle požadovaného výstupního proudu. Rovněž transformátory obsahují odbočky, pomocí kterých lze regulovat vstupní napětí. Tyto transformátory jsou speciálně vinuty tak, aby se dosáhlo při jejich zkratu maximálních proudů v řádu několika tisíc ampér.

Na tyto akční proudové transformátory jsou připojeny 3 měděné masivní vodiče (DUT). Lze je libovolně zaměnit za jiné, stejně tak lze v určitém rozmezí měnit vzdálenost mezi nimi. Konce vodičů jsou opatřeny zkratem pomocí měděných plechů. Sekundár je zapojen do hvězdy. Na vodičích jsou nasunuty měřicí transformátory proudu (MT), které jsou připojeny k měřicímu analyzátoru Norma 5000 (M). Na tomto měřicím analyzátoru lze též měřit libovolná napětí.

K měření vektoru magnetické indukce vně vodičů použijeme 3D Hallovu sondu (3DHP). Výstup z této sondy je připojen na napěťové vstupy analyzátoru Norma 5000. Sonda je připevněna na 1D pozičním systému (1DPS), který je poháněn krokovým motorem (SM). Ten je připojen k AD převodníku NiDaq (ADC), který ho ovládá.



Obrázek 5: Aparatura pro kompletní studii experimentálního modelu rozvodny



Obrázek 6: Blokové schéma aparatury, Legenda: PG - Programovatelný generátor Chroma 61704, M - Měřicí analyzátor Norma 5000, ADC - AD převodník NiDaq, TPT - Tří fázový transformátor, 3DHP - 3D Hallova sonda, SM - Krokový motor, DUT - Masivní vodiče, MT - Měřicí transformátory, 1DPS - 1D poziční systém, PC - Osobní počítač

Podrobný popis použitých přístrojů je v práci, zde se pouze zmíníme o vlastnostech programovatelného generátoru Chroma 61704. Jeho výstupem je téměř libovolné trojfázové napětí. Frekvenční rozsah lze nastavovat v rozmezí 15 Hz až 1200 Hz. Výstupní trojfázové napětí lze

měnit v plném rozsahu. Při dané frekvenci je to poměrně tvrdý zdroj, výstupní napětí málo klesá s rostoucím odebíraným proudem. Pokud je výstup harmonický (sinusový) lze libovolně měnit úhel mezi fázemi, dále lze v každé fázi nastavit jiné napětí. Lze tedy vytvářet libovolnou nesymetrickou harmonickou trojfázovou soustavu. Obecně lze však požadovat libovolný časový průběh na výstupu. Základní průběhy (obdélník, pila atd.) jsou přednastaveny, ostatní je možno naprogramovat. Tímto způsobem lze mj. experimentálně simulovat poruchy.

Originální zapojení 3D Hallovy sondy má unipolární výstup a naměřené Hallovo napětí bylo nutno odečíst od referenčního napětí 2.5 V. Při měření slabých polí a tudíž i malých Hallových napětí, což je pro tuto práci typické, byly měřené napětí a vypočtená magnetická indukce zatíženy velkou chybou. Proto bylo pozměněno zapojení. Výstupní Hallovo napětí bylo přivedeno přímo na vstup zesilovače v rozsahu -2.5 až 2.5 V v diferenciálním módu. Abychom byli v tomto zapojení schopni určit jaké napětí odpovídá magnetické indukci, byla zhotovena Helmholtzova cívka a pomocí ní měřicí systém zkalibrován. Takto určená převodní konstanta umožnila spolehlivé měření magnetické indukce v řádu 100 μT . Pro porovnání poznamenejme, že zemské magnetické pole má typickou hodnotu kolem 50 μT .

Jako poziční systém je využita část z lineárního posuvu A3 tiskárny. Prakticky lze posuvu využívat v délce necelých 400 mm. Pozice posuvu je řízena z AD převodníku Nidaq, kde na jeho výstupy je připojen jednoduchý DA převodník, který zajišťuje pohyb krokového motoru a tím pohybuje i celým pozičním systémem, na kterém je umístěna 3D Hallova sonda. Při čtyř pulzním řízení krokového motoru je vzdálenost mezi sousedními pozicemi měřicí sondy 0.8 mm.

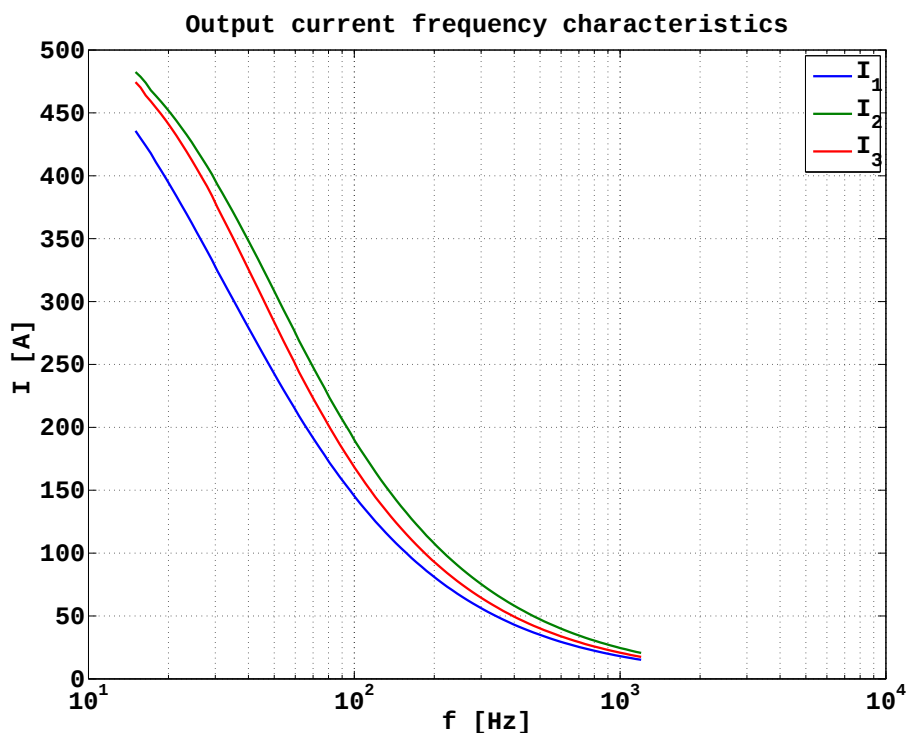
4.1 Frekvenční závislost výstupního proudu

Jedinou vadou měřicí aparatury byla frekvenční závislost velkých proudů ve vodičích. S rostoucí frekvencí maximální proud ve vodičích výrazně klesal. To nepříjemně ovlivňovalo měření, protože skinefekt se nejvýrazněji projevoval při nejvyšší frekvenci. Při této frekvenci však tekla nejmenší proud, magnetická indukce byla nejslabší a tudíž byla výrazně zatížena chybou pocházející ze šumu a rušení.

Experimentální frekvenční závislost výstupního proudu při konstantním napětí na primáru rovném 150 V je na obr. 7 je vidět, že ve sledovaném frekvenčním pásmu proud klesne asi desetkrát.

Tento jev lze připisat jak vlastnostem trojfázového zdroje Chroma, tak výkonovým transformátorům, které vytvářejí vysoký proud na výstupu. S cílem zjistit vlastnosti transformátorů jsme provedli měření frekvenční závislosti primárních i sekundárních proudů při konstantním napětí na primáru. Z nich jsme vypočítali přenos proudu, který je v horní části obr. 8. Z průběhu je zřejmé, že přenos proudu s rostoucí frekvencí klesá, transformátor tedy není zdaleka ideální. V okolí frekvence 50 Hz je však přenos proudu zhruba konstantní, pravděpodobně transformátor byl navržen jen pro tuto úzkou frekvenční oblast.

S cílem porovnat vliv primáru jsme sestavili velmi jednoduchý náhradní obvod transformátoru. Na primáru je paralelní kombinace indukčnosti 0.15 H a odporu 200 Ω . K nim je připojen ideální transformátor, avšak s frekvenčně závislým přenosem proudu podle grafu na horní části obr. 8. Na výstupu je zkratován. Porovnání naměřeného a teoreticky vypočteného proudu z tohoto velmi jednoduchého modelu je na dolní části obr. 8. Při nízkých frekvencích je teoretický proud vyšší. To nepřekvapuje, při nízkých frekvencích se projevují materiálová omezení u všech transformátorů. Při vyšších frekvencích si křivky poměrně dobře odpovídají. Výkonové transformátory jsou pravděpodobně hlavní příčinou nízkých proudů při vysokých



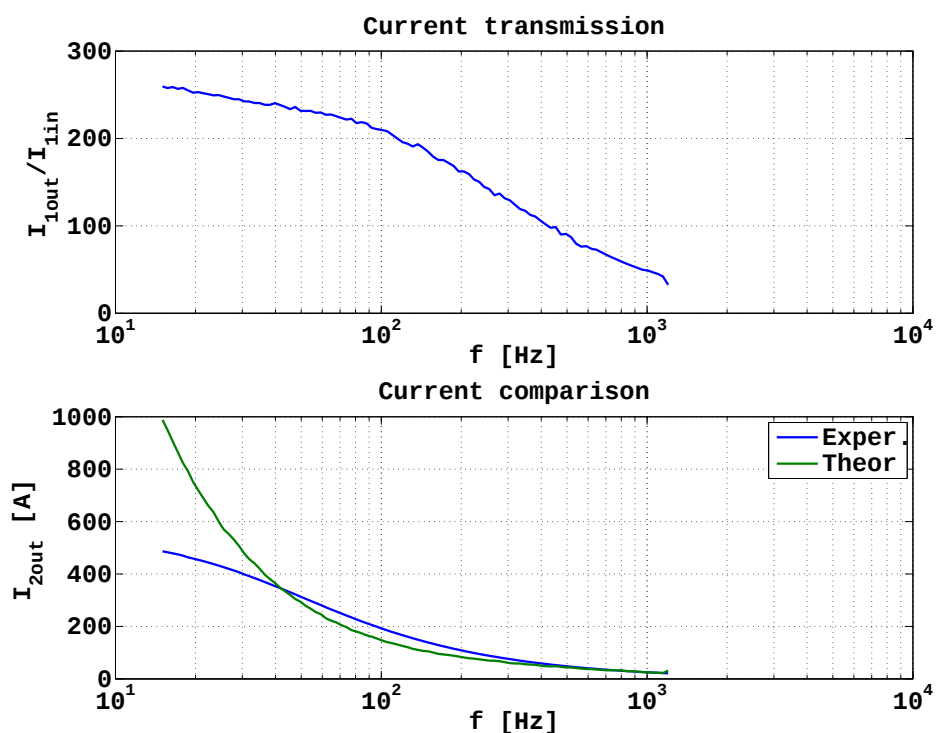
Obrázek 7: Závislost proudů ve vodičích na frekvenci

frekvencích. Mohou zde hrát roli ale i další do modelu nezahrnuté jevy. Chybu u výkonových transformátorů lze spatřovat v návrhu, asi nebyl požadavek, aby pracovaly při frekvenci kolem 1 kHz.

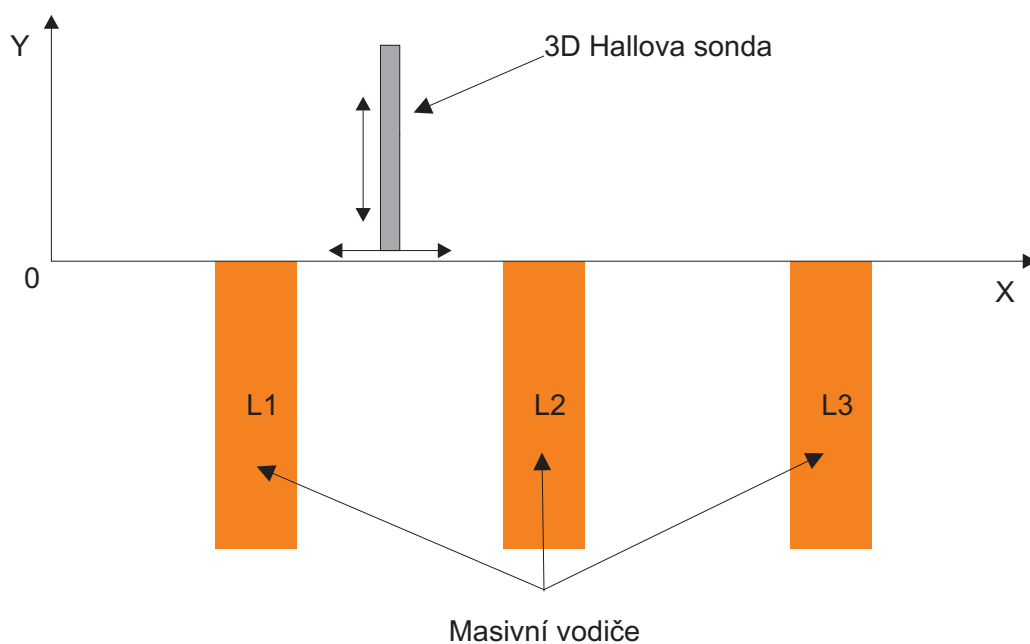
4.2 Měření magnetického pole

Předmětem hlavního studia je magnetické pole v okolí tří masivních vodičů, které napájíme třemi fázovými napětími. Vektorové střídavé magnetické pole se prostřednictvím magnetické indukce měří na vybrané úsečce, která je těsně nad horním povrchem vodičů – viz obr. 9, pomocí 3D Hallovovy sondy. Frekvenční pásmo napájecího proudu je v rozmezí od 15 Hz do 1,2 kHz. Maximální proud, který vodiči protéká, se podle použité frekvence mění od 1500 do 150 A. Měří se v časové oblasti s poměrně vysokou vzorkovací frekvencí přes několik period. Všechna naměřená data (vzorky) jsou uložena do paměti počítače. Pozice sondy ve směru osy X je řízena počítačem. Pozice ve směru osy Y je libovolně nastavitelná v držáku, viz. obrázek 9.

Předběžné zpracování dat ukázalo, že se výrazně uplatní vířivé proudy, které překryjí projevy skinefektu. Jelikož nám šlo především o ověření rozložení proudové hustoty podle podrobně rozpracovaného modelu, museli jsme měření pozměnit. Především bylo nutno budít jen jednu, a to prostřední, fázi. Tím se ve středním vodiči eliminují vířivé proudy buzené vnucenými proudy v krajních vodičích. Krajními vodiči však tečou proudy zpět o poloviční intenzitě, které ve středním vodiči opět vytvářejí vířivé proudy, i když slabší. K jejich snížení se v aparatuře oba krajní vodiče oddálí na maximální možnou vzdálenost, což bylo kolem 10 cm. Třetím, a nejúčinnějším, opatřením bylo používat hodnoty při maximu budícího proudu ve středním vodiči. Pak je jeho derivace nulová a vířivé proudy teoreticky neexistují. První dvě opatření



Obrázek 8: Experimentální a teoretická frekvenční závislost proudu u transformátoru



Obrázek 9: Poziční systém pro 3D Hallovu sondu

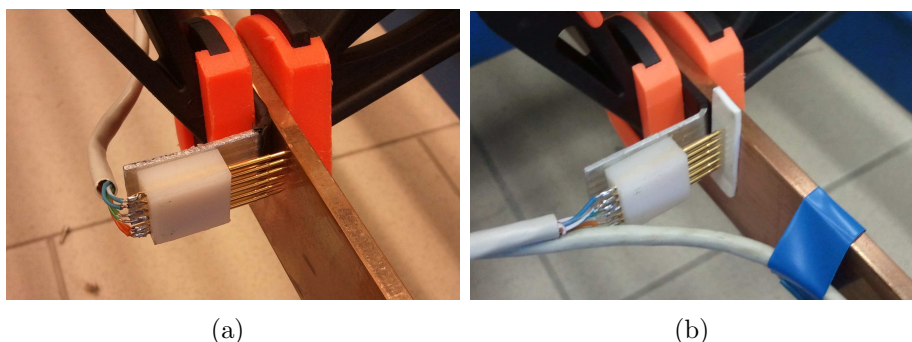
byla experimentální a jsou popsána podrobněji níže, třetí softwarové.

Optimální řešení by bylo vést zpětný vodič alespoň ve vzdálenosti 1 m od vodiče studovaného. Experimentálně realizace však naráží na technické potíže. Vlastními prostředky se nepodařilo dosáhnout dostatečných proudů, takže naměřené výsledky nelze spolehlivě zpracovat

a posoudit.

4.3 Napětí na povrchu masivního vodiče

Dalším poměrně snadno realizovatelným měřením je měření úbytku napětí na povrchu vodiče mezi dvěma body, které jsou ve stejné vzdálenosti od hrany vodiče. Lze to provést např. jehlovými sondami. Sada sond obsahovala šest odpružených pozlacených hrotů, které byly umístěny na úsečce — viz obr. 10. Rozteč špiček hrotů je 2.5 mm. Na konce těchto hrotů byl napájen svazek ethernetového kabelu, jelikož je kroucený, a tak lépe odolává rušení. Měření jsme provedli pouze na hrotech 1, 3 a 5.

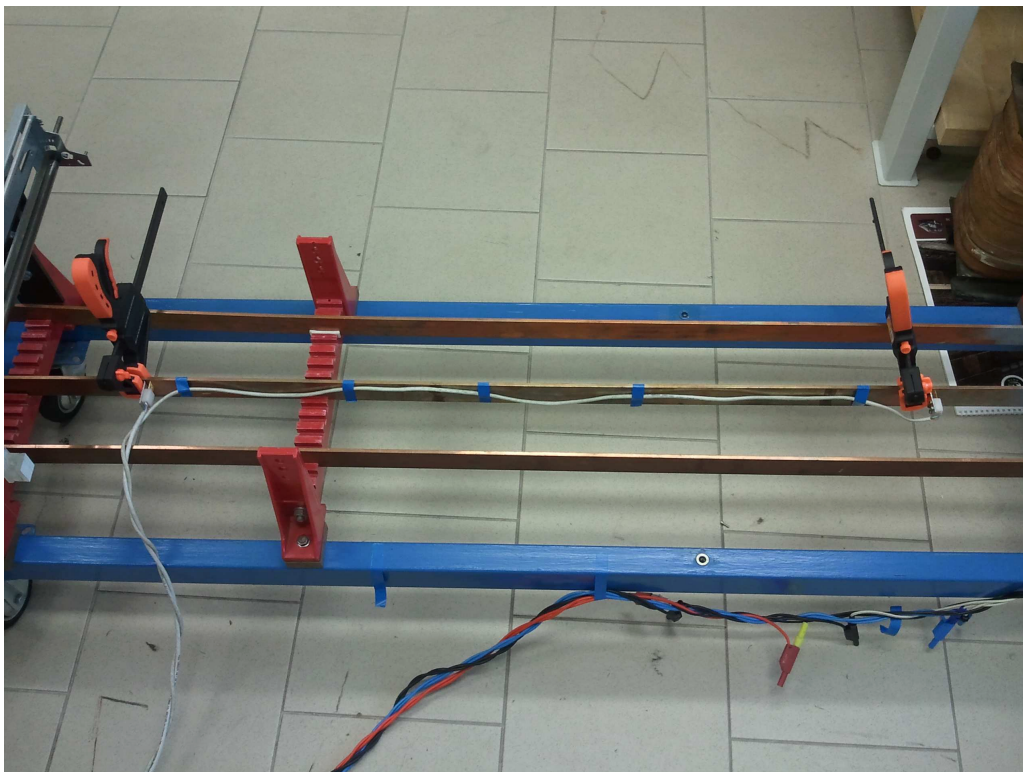


Obrázek 10: Sonda pro měření napětí na povrchu masivního vodiče. a) umístění hrotů b) odizolování hrotů od vodiče

Na obrázku 10a si můžeme prohlédnout konstrukci a umístění měřících hrotů. Napětí se měřilo mezi dvěma sondami, které byly od sebe vzdáleny 1 m, viz. obrázek 11. Zpětný svazek vodičů od vzdálené sondy byl připevněn na studovaný vodič z důvodu omezení indukovaného napětí minimalizací plochy v uzavřené měřící smyčce. Veškeré přívodní vodiče pro měření napětí jsme se snažili do sebe zakroutit a nezvyšovat tak zbytečně plochu uvnitř smyčky, viz obrázek 11.

Poměrně rozsáhlý experiment měření napětí na povrchu masivního vodiče byl proveden v zapojení s buzením proudu v jedné prostřední fázi. Problém je v tom, že na měřícím přístroji se měří vektorový součet hledaného úbytku napětí na masivním vodiči a napětí, které časově proměnné magnetické pole indukuje ve smyčce tvořené úsekem masivního vodiče a přívodními vodiči. S cílem odstranit indukované napětí v měřící smyčce je nutné jej nejprve změřit. Proto jsme provedli tři typy měření:

1. Měření úbytku napětí na masivním vodiči. Sondy se umístily kolmo na protékající proud a rovnoběžně s nejdelší stranou měděného vodiče. Měřili jsme zde tři úbytky napětí na třech úsečkách.
2. Měření napětí naprázdno. Tato orientační část měla zjistit, jak velké rušení se naindukuje do přívodních kabelů. Sondy byly odizolovány od vodiče polyamidovou podložkou, viz obr. 10b.
3. Měření indukovaného napětí vyvolaného časově proměnným magnetickým polem ve smyčce. V této části jsme měřili indukované napětí ve smyčce, která by měla být identická se



Obrázek 11: Pohled na umístění sond a přírodních vodičů

smyčkou v části 1, ale odizolovaná od masivního vodiče. Prakticky to znamenalo odizolovat obě sady sond od vodiče a zkratovat je tak, aby se plocha obklopená smyčkou nezměnila. Vyzkoušeli jsme několik možností: volný vodič, tuhý drát a měděný pásek s izolací, který se projevil jako nejvhodnější řešení. Sonden se umístily na měděný pásek, který se nalepil na povrch vodiče. Pásek od vodiče byl odizolován z obou povrchů a konce se odizolovaly z jedné strany podle umístění dosedajících hrotů.

5 Výpočty

Důležitou součástí práce byly výpočty. Jednak sloužily k názornému zobrazení a pochopení výsledků získaných v teoretické části, jednak byly nutnou operací při úpravě a zpracování digitálních signálů, které byly výstupem experimentu, což stručně popíšeme v této části.

Všechna měření byla provedena v časové oblasti. Jinak to asi ani nebylo možné, protože pracujeme se střídavými proudy. Po nastavení parametrů experimentu byl při konstantní frekvenci digitálně nasnímán určitý časový úsek dat, která obsahovala průběh nastavených harmonických proudů jako budících veličin a průběh napětí (přímo měřených nebo z 3D Hallovy sondy) jako odezvu. Vzorkovací frekvence byla vždy natolik vysoká, že rozdíl mezi sousedními vzorky byl malý. Data tak bylo možno v prvním přiblížení pokládat za spojitá.

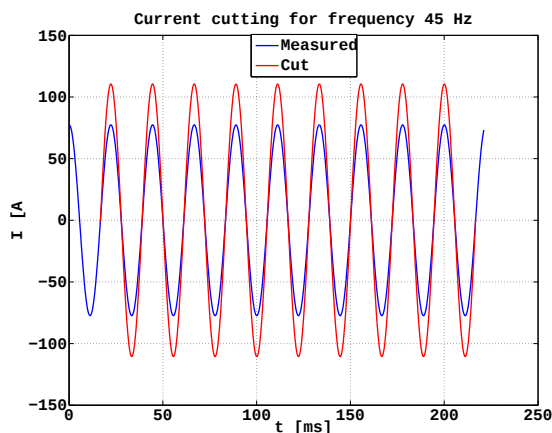
Doba snímání (neboli počet sejmutých vzorků) byla nastavena tak, že při kterékoliv budící frekvenci byl sejmut zhruba stejný počet period. Zpravidla to bylo kolem deseti. Počáteční okamžik snímání však bez dalších opatření, který jsme nepoužili, byl zcela náhodný. Pro porovnání jednotlivých sejmutých průběhů proto bylo nejprve nutno naměřená data synchronizo-

vat. Protože byla měřena poměrně nízká napětí, řádu mV, dalším problémem bylo odstranění rušivých signálů a šumu. Jako největší zdroje rušivého signálu byla zejména výkonová síť 50 Hz, dále pak působení spínaných zdrojů. O řešení těchto problémů pojednáváme dále.

K synchronizaci byl použit budící proud, protože ten nabývá velké hodnoty stovek ampér, takže byl zatížen šumem a rušením nepatrně. Počáteční čas vybraného úseku byl získán jako první vzestupný průchod nulou. Jednoduchý algoritmus byl založen na dvou po sobě následujících postupech. První část spočívala v tom, že od počátku dat byly v naměřeném souboru dat porovnávány sousední hodnoty. Index prvního vzestupného průchodu nulou byl stanoven z podmínky, že levý vzorek (první z dvojice) má nekladnou hodnotu a pravý vzorek (druhý z dvojice) má hodnotu nezápornou. S cílem získat maximální rozsah byl konečný čas úseku zjišťován jako poslední vzestupný průchod nulou a to tak, že sousední vzorky byly porovnávány od konce naměřených dat směrem k počátku. Podmínka nyní byla opačná — levý vzorek (druhý z dvojice) má nekladnou hodnotu a pravý (první z dvojice) nezápornou.

Výsledek je na obr. 12. Naměřený úsek obsahuje téměř deset period, počáteční a konečná fáze jsou však náhodné. Po oříznutí se k dalšímu zpracování použilo devět period. Vybraný úsek má tu výhodu, že začíná a končí stejnou fází, které přísluší nulová hodnota a kladná derivace⁴. Pro zřetelnost byl upravený úsek na obr. 12 zvětšen.

Chyba takto určeného okamžiku vzestupného průchodu nulou dosáhla v nejhorším případě délky vzorkovací periody. Protože byla použita vysoká frekvence vzorkování, tato chyba byla zanedbatelná. Interpolací bylo samozřejmě možné určit tento okamžik přesněji, z výše uvedeného důvodu jsme ji však nepoužili.



Obrázek 12: Vyříznutí přesně definovaného úseku dat

Takto získané indexy pak posloužily k výběru stejného úseku v sejmutém časovém průběhu závislých veličin, kterými jsou např. napětí a magnetická indukce. Protože se jedná o digitální data sejmutá z jednoho přístroje, počáteční časové okamžiky souhlasí, pokud ovšem zanedbáme skutečnost, že průběhy jsou snímány postupně, tedy následující průběh je protože zpožděn oproti předchozímu. Jelikož se jednalo maximálně o čtyři měřené časové průběhy, toto zpoždění bylo možné zanedbat proti vzorkovací periodě. Takže můžeme říci, že počáteční indexy zajistí, že všechny sejmuté veličiny začínají ve stejné fázi a zásluhou koncových indexů ve stejné fázi i končí. To mj. umožní velmi jednoduše posoudit v časové oblasti fázový vztah měřených napětí a magnetické indukce vzhledem k budícímu proudu.

⁴Tato derivace se chápe jako derivace zprava na počátku úseku a derivace zleva na jeho konci.

Podmínka nulové hodnoty budícího proudu nebyla pro následné zpracování nutná, poskytovala však větší pohodlí. Nutná byla ale podmínka celého počtu period pro aplikaci rychlé Fourierovy transformace, FFT. Důsledky nesplnění této podmínky se projeví v rozmazání spektra, což má za následek, že rekonstruovaný časový průběh není harmonický. Tento jev je znám z běžné literatury a v disertační práci je názorně ilustrován.

Protože malé měřené napětí bylo zatíženo relativně velkým šumem a rušením, bylo nutno tyto rušivé složky odstranit. Existuje řada chytře vymyšlených a různě složitých metod k redukci rušení. Z praktických důvodů jsme se však omezili na dvě nejjednodušší možnosti:

1. Metoda klouzavého průměru.
2. Metoda Fourierovy transformace.

Metoda klouzavého průměru je rychlá, má však několik nevýhod.

1. Především je třeba zkusmo nastavovat počet průměrovaných vzorků.
2. Bez dalších opatření se rozsah vyšetřované časové oblasti zkrátí o počet vzorků. Tomu lze zabránit posunutím získaných hodnot. Není to však jednoduché.
3. Klouzavým průměrem se také zkreslí hledaný průběh. Čím větší počet vzorků se použije, tím je zkreslení větší.

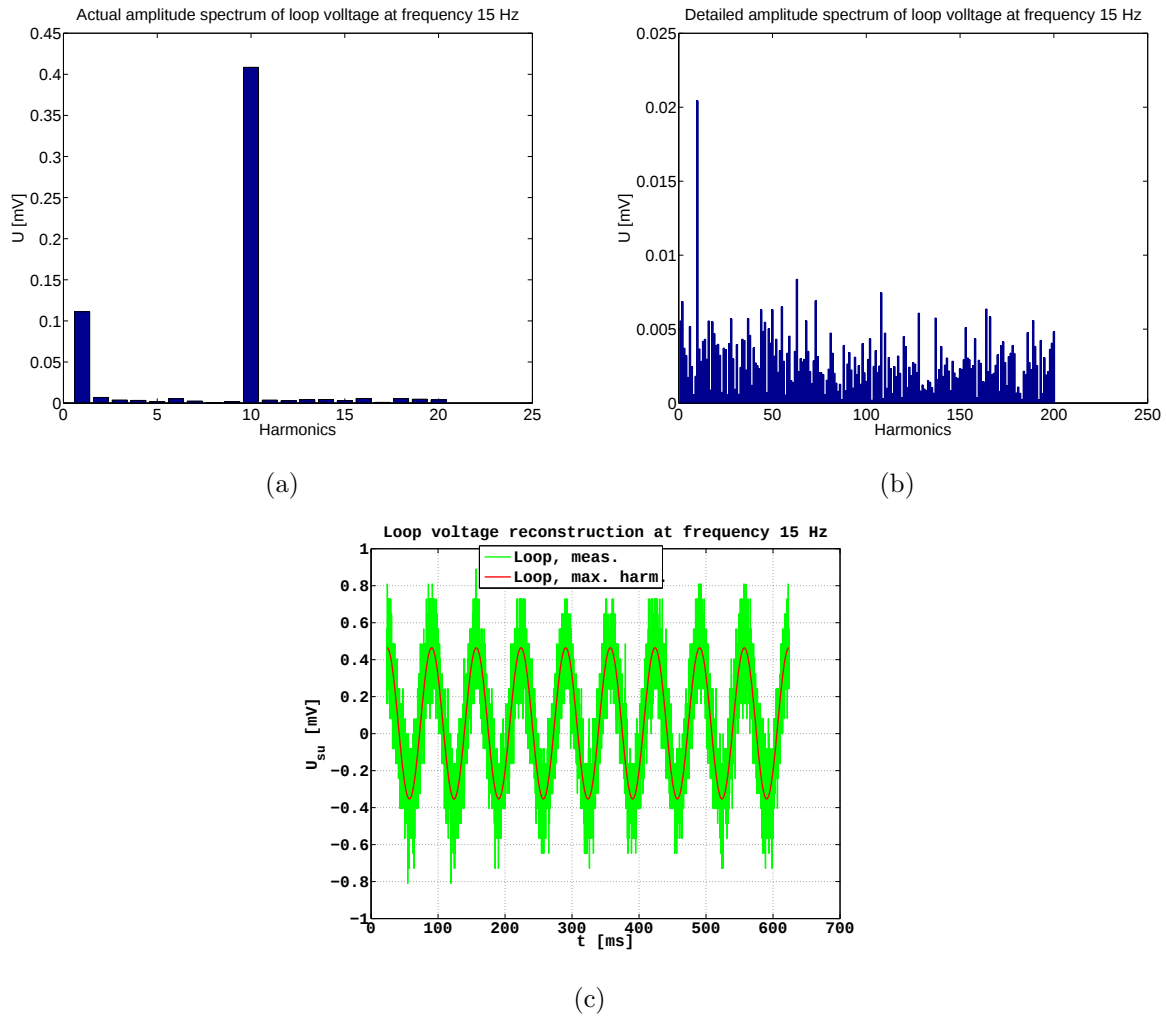
I když jsme v počáteční fázi klouzavý průměr používali, nakonec jsme přešli k metodě Fourierovy transformace, která se v systému MATLAB navíc aplikuje velmi jednoduše. Pouze je nutno vzít v úvahu, že v komplexním výstupním spektru má stejnosměrná složka index 1 a první harmonická index 2. Jako příklad uvedeme na obr. 13 postup při odstranění šumu pro poměrně malé indukované napětí při nízké frekvenci 15 Hz. Nejdůležitější část (z hlediska podstatné informace) jeho amplitudového spektra je na obr. 13a.

Ve spektru na obr. 13a je dominantní devátá harmonická, protože je zpracováno přesně devět period. Výrazná je též stejnosměrná složka (o indexu 1). Maximální harmonická a stejnosměrná složka slouží k rekonstrukci měřeného průběhu. Výsledek je na obr. 13c. Složka napětí o frekvenci 15 Hz spolehlivě odpovídá naměřenému průběhu.

Naměřený průběh je silně zašuměn. Šumové složky nejsou v amplitudovém spektru na obr. 13a zřetelné, protože jsou jednak slabé, jednak mají zpravidla podstatně vyšší frekvence. Pokud frekvenční oblast rozšíříme a šumové složky zdůrazníme, jak je tomu na obr. 13b, zjišťujeme, že nemůžeme přesně identifikovat polohu maximální harmonické. Tento obrázek potvrzuje, že šum a řešení jsou všudypřítomné. Ke zvýraznění šumu byly stejnosměrná složka a maximální amplituda sníženy dvacetkrát. Ostatní harmonické jsou beze změny. To se nakonec pozná i ze stupnice na svislé ose, porovnáme-li obr. 13a a 13b.

Tato metoda současně redukuje i rušivé signály, protože ve spektru, jako např. na obr. 13a, vynuluje všechny rušivé harmonické a ponechá jen ty užitečné, v našem případě devátou harmonickou a stejnosměrnou složku. Spektrální složky užitečného signálu a rušení však musí být odlišné. Musí se lišit alespoň o jednu harmonickou.

Tato selektivní filtrace však narazí na potíže, pokud jde o rušení od energetické sítě. Toto rušení se může při souhlasu frekvencí přičíst k užitečným harmonickým vyšetřovaného průběhu. Abychom se vyhnuli silnému rušení z této sítě, volili jsme frekvence budícího proudu tak, aby nebyly blízkým násobkem frekvence 50 Hz. Zpravidla jsme použili logaritmickou řadu 15, 45, 135, 405 a 1200 Hz.



Obrázek 13: Rekonstrukce užitečného signálu: a) Amplitudové spektrum — klíčové informace, b) amplitudové spektrum — širší frekvenční oblast, c) rekonstrukce časového průběhu

6 Výsledky

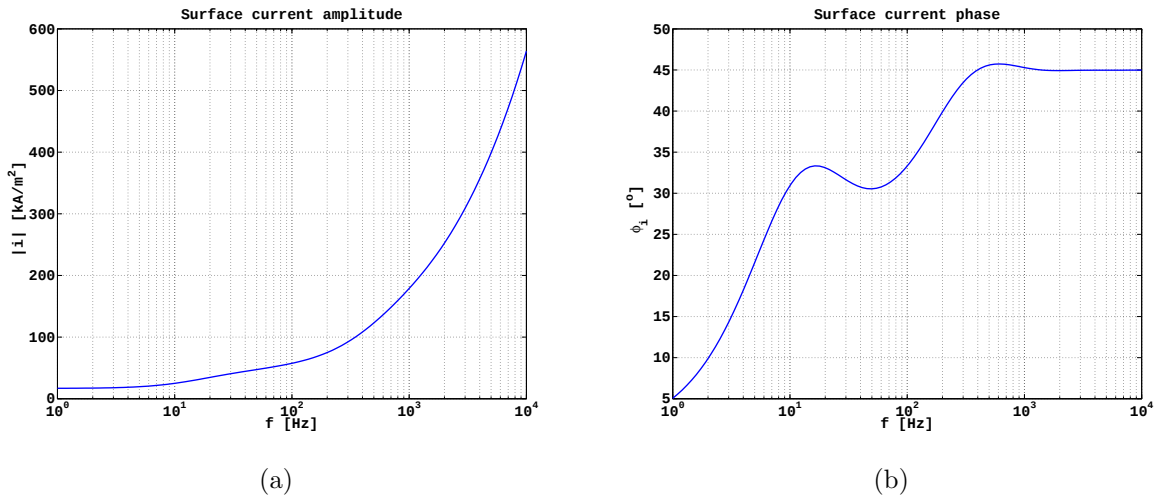
V této části uvádíme důležité teoretické i experimentální výsledky. Soustředíme se především na magnetická měření, protože jsme jim věnovali po všech stránkách největší pozornost.

6.1 Frekvenční závislost povrchové proudové hustoty

Jedinou veličinou, kterou lze snadno měřit, je napětí na povrchu vodiče. Proto je na obr. 14a uvedena frekvenční závislost přepočtené amplitudy povrchového proudu. Tyč má opět rozměry 10 x 50 mm a teče jí celkový proud 100 A při všech frekvencích. Jak se dalo očekávat, s rostoucí frekvencí hustota proudu na povrchu tyče narůstá. Proud je vytlačován na povrch vodiče, jak se říká v základních učebnicích.

Frekvenční závislost fázového posuvu povrchového proudu je na obr. 14b. Při nízkých frekvencích se blíží k nule, při vysokých se blíží k hodnotě 45°. Jeho nárůst však není monotonní, existují dvě lokální maxima. První výrazné maximum je kolem frekvence 20 Hz, druhé, podobné, kolem frekvence 800 Hz. Zde fázový posuv přesahuje hodnotu 45°. Jejich příčinu a

význam neumíme vysvětlit. Program je poměrně jednoduchý, takže asi nejde o chybu v algoritmu.



Obrázek 14: Proudová hustota na povrchu svislé stěny tyče: a) amplituda, b) fázová konstanta

6.2 Měření napětí na povrchu vodiče

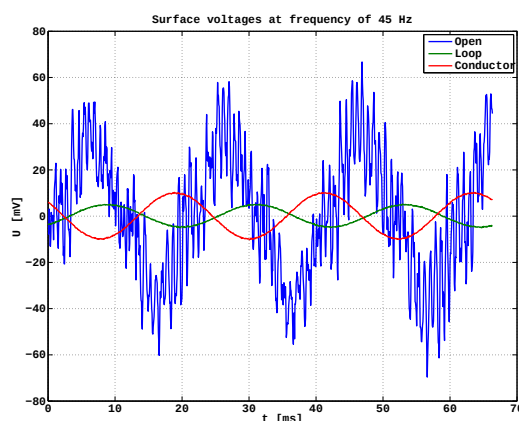
Kromě magnetického pole je další relativně snadno měřitelnou veličinou napětí na povrchu vodiče. V principu lze k povrchu vodiče přiložit sondy ve stejné vzdálenosti od hrany a měřit napětí mezi nimi. Je zde však zásadní fyzikální i technický problém. Kromě užitečného napětí se měří i napětí indukované v měřicí smyčce, které je nutno zjistit zvlášť.

Podrobnosti jsou v části Experiment. Zde pouze připomeneme, že byly použity tři dvojice sond na svislé stěně vodiče, tj. byla měřena tři napětí. Napětí bylo měřeno v těchto polohách: těsně pod hranou, ve vzdálenosti od hrany rovné zhruba čtvrtině výšky plochy a uprostřed plochy. V principu by se tedy měla zachytit případná nerovnoměrnost povrchové proudové hustoty. Prakticky jsme měřili tři napětí: (1) Napětí mezi volnými sondami, tedy napětí naprázdno. (2) Napětí mezi zkratovanými sondami odizolovanými od povrchu vodiče pomocí měděného pásku, které pracovně nazveme napětí ve smyčce. (3) Napětí mezi sondami přiloženými na povrch vodiče, které nazveme pracovně napětí na vodiči.

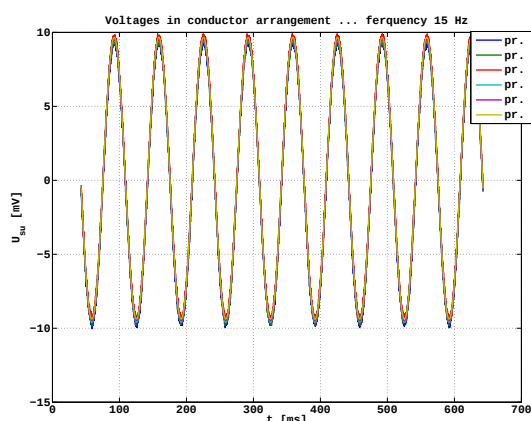
Příklad všech tří napětí je na obr. 15 pro vnucenou frekvenci 45 Hz. Fázový vztah mezi napětími je nahodilý, protože byla měřena postupně. Napětí naprázdno je superpozicí frekvence sítě a nějaké vyšší frekvence. Ostatní dvě napětí mají zhruba harmonický časový průběh a šum je relativně malý.

Základním cílem bylo zjistit, jak se liší napětí měřená na jednotlivých dvojicích sond. Výsledky měření pro nejnížší nastavitelnou frekvenci 15 Hz pro vodič jsou na obr. 16a a pro smyčku na obr. 16b. Na těchto detailních obrázcích jsou uvedeny jednak skutečně naměřené průběhy se šumem, které jsou označeny jako "pr. x meas.", kde x je pořadí sondy, jednak průběhy aproximované maximální harmonickou, které mají označení "pr. x rec.". Sonda číslo 1 je těsně u hrany vodiče, sonda s pořadovým číslem 3 je zhruba uprostřed vodiče.

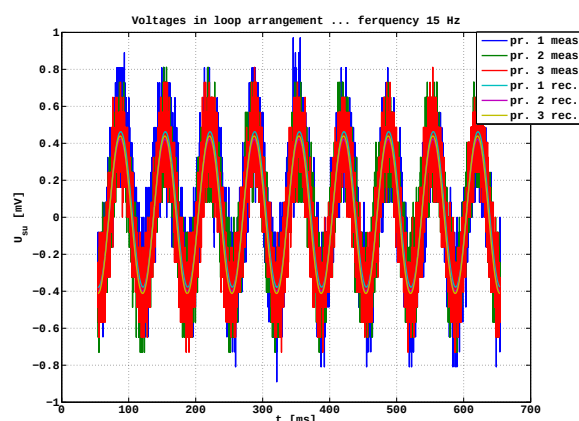
Tyto dva obrázky, obr. 16a i 16b, se vztahují k nejhoršímu případu, kdy je napětí na povrchu vodiče nebo pásku nejmenší. Na obr. 16 si všimněme, že rušení na vodiči je velmi malé i při



Obrázek 15: Napětí mezi sondami měřená ve třech režimech



(a)



(b)

Obrázek 16: Napětí od různých sond při frekvenci 15 Hz: a) napětí na drátu, b) napětí na smyčce

nejnižší frekvenci. Při nízkých frekvencích se na smyčce uplatňuje výrazný šum, jak ukazuje obr. 16b. I přes výrazný šum se však aproximace liší málo. Tedy i v tomto nejhorším případě nezávisí napětí (jak amplituda, tak fáze) na smyčce na poloze sondy.

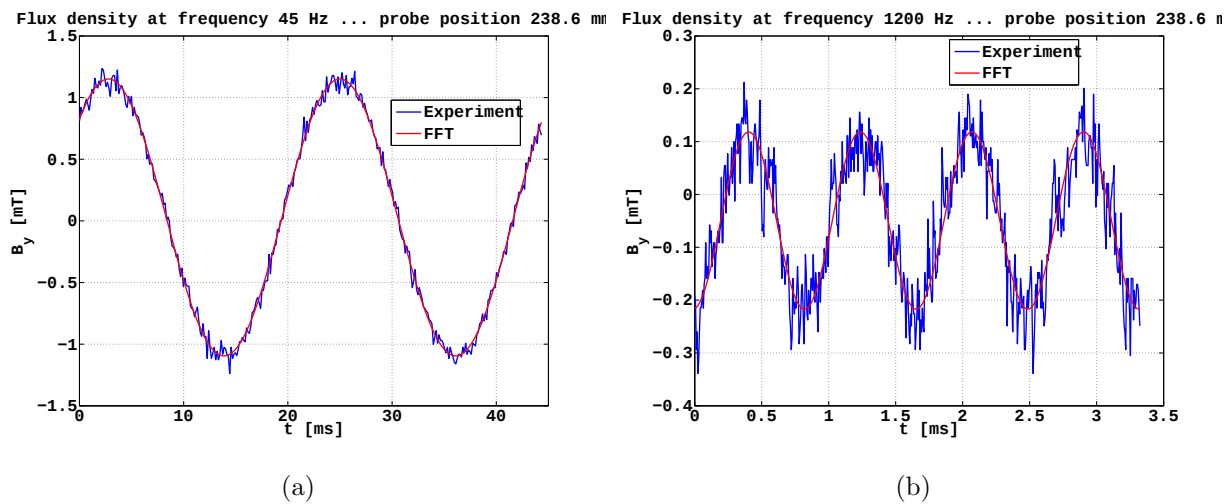
Po provedení korekce na indukovaném napětí se ukázalo, že sondy na vodiči naměří stejný skutečný úbytek napětí, co do amplitudy i fáze, bez ohledu na jejich polohu a to jak při nejnižší, tak při nejvyšší frekvenci. Při nejnižší frekvenci by se skin efekt podle teoretických výpočtů uplatnit neměl a výsledek je dle očekávání. Při nejvyšší frekvenci by mohl být jeho vliv zřetelný, pokud by platila teorie proměnného povrchového proudu, viz 3.1.1. Ale není tomu tak, alespoň při dané přesnosti a citlivosti experimentu.

6.3 Průběh magnetického pole v okolí vodiče

V této části uvedeme zejména klíčové experimentální výsledky. Pro získání představy s jakými daty jsme pracovali, jsou nejdříve uvedeny typické průběhy v časové oblasti. Dále budeme sledovat, jak průběh pole závisí na poloze úsečky, na níž bylo měření provedeno, zejména je-li uprostřed přímého vodiče nebo blízko transformátorů a přívodních vodičů. Jelikož nám stále jde o ověření skinefektu, posoudíme příspěvek od vířivých proudů. Nakonec porovnáme vypočtené a naměřené výsledky pro skinefekt.

6.3.1 Časová oblast

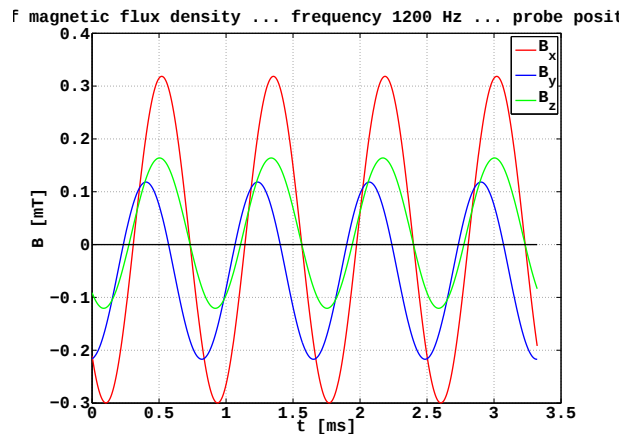
Při krajní vysoké frekvenci 1200 Hz, která byla pro nás nejdůležitější, tekl vodiči poměrně slabý proud a buzené magnetické pole bylo rovněž slabé, často na hranici měřitelnosti. Porovnání průběhu svislé složky magnetické indukce pro nízkou frekvenci 45 Hz, která je blízká frekvenci sítě a pro nejvyšší použitou frekvenci je na obr. 17. Průběh je aproximován pomocí FFT a jsou uvedeny experimentální body. Šum a rušení při nízké frekvenci jsou snesitelné, při nejvyšší frekvenci jsou výrazné. Magnetická indukce klesla asi desetkrát. Pro představu připomeneme, že měřená magnetická indukce je v tomto případě srovnatelná s indukcí zemského magnetického pole, který je kolem $50 \mu\text{T}$. Je nutno navíc zdůraznit, že pro nejvyšší frekvenci nebyl vybrán nejhorší případ. Rekonstruované (aproximované) průběhy všech tří složek magnetické indukce



Obrázek 17: Časový průběh svislé složky magnetické indukce a) frekvence 45 Hz, b) frekvence 1200 Hz

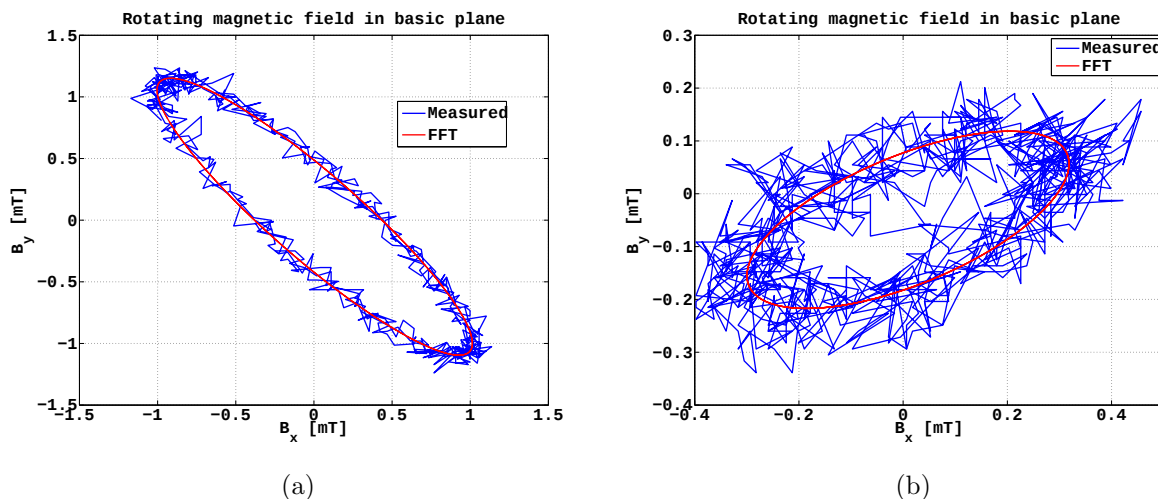
při nejvyšší frekvenci jsou na obr. 18. Průběhy nejsou symetrické vzhledem k vodorovné ose. Jedním z vysvětlení je to, že se může uplatnit zemské magnetické pole. Pro slabší hodnoty indukce je asymetrie daleko víc zřetelná. Neočekávaným výsledkem je poměrně velká axiální složka magnetické indukce, složka B_z . Ta by podle teorie a symetrie úlohy neměla existovat.

Poměrně překvapivým bylo zjištění, že i v případě jedné fáze se vytváří v prostoru kolem vodičů točivé magnetické pole. Pro budicí frekvenci 45 Hz je toto pole na obr. 19a a pro nejvyšší frekvenci 1200 Hz na obr. 19b. V obou případech je zřejmý velký vliv šumu a rušení. Pro nejvyšší frekvenci jsou rušení a šum výrazné, nicméně i v tomto nejnepríznivějším případě lze i z experimentálních bodů elipsu poznat. Zajímavé je i to, že elipsy na obr. 19a a obr. 19b



Obrázek 18: Časové průběhy všech tří složek magnetické indukce při frekvenci 1200 Hz

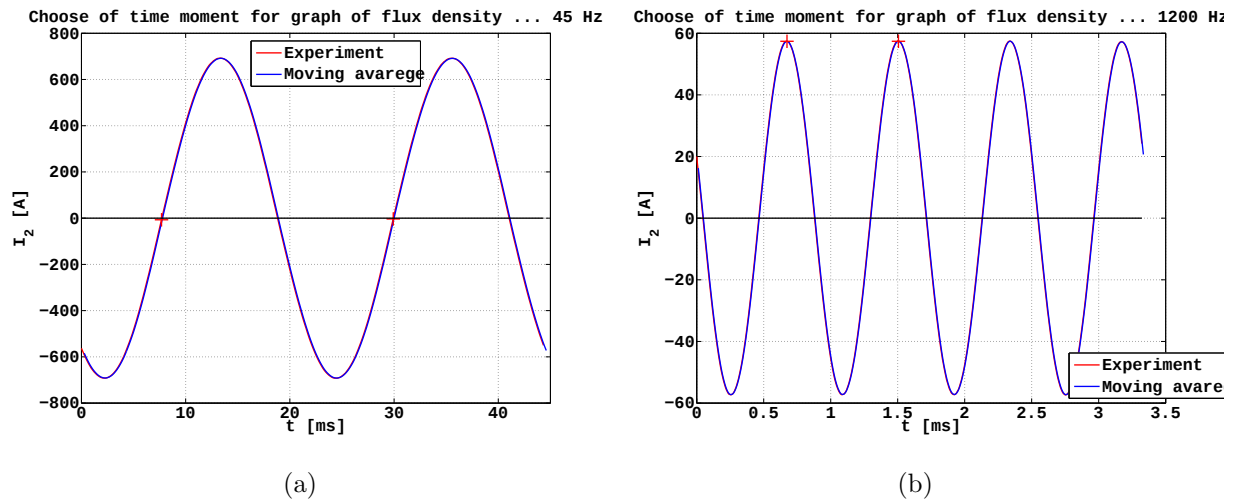
jsou orientovány rozdílně, přestože jde o tutéž polohu v magnetickém poli. Liší se jen frekvence, zato více než o řád.



Obrázek 19: Točivé magnetické pole v jedné aktivní fázi a) frekvence 45 Hz, b) frekvence 1200 Hz

Z hlediska redukce vlivu vířivých proudů je důležitý okamžik v časové oblasti, v němž vzorek magnetické indukce či proudu odebíráme. Tento okamžik se zadává pomocí fázové konstanty. Zvolený časový okamžik pro nulovou fázovou konstantu při frekvenci 45 Hz je vyznačen pro průběh proudu na obr. 20a. Pro kontrolu je výběr proveden ještě jednou na následující periodě. Pro frekvenci 1200 Hz a fázový posuv 90° slouží obr. 20b.

Při dostatečně zvětšeném obrázku 20a se ukazuje, že vybranému časovému okamžiku neodpovídá nulová fázová konstanta. To je způsobeno nízkým počtem vzorků na periodu. Vzorovací frekvence byla volena tak, aby na periodu připadlo kolem 150 vzorků. Mezi sousedními vzorky je tedy fázový posuv kolem $2,4^\circ$. V nejnepríznivějším případě to může být i odchylka v požadované fázové konstantě. V průměru je poloviční, nicméně zřetelná a může ovlivnit zpracování.



Obrázek 20: Referenční časový okamžik: a) pro fázovou konstantu 0° a frekvenci 45 Hz b) pro fázovou konstantu 90° při frekvenci 1200 Hz

vané výsledky. Snadno lze tento problém redukovat volbou vyšší vzorkovací frekvence. Pak ale narůstá objem uchovávaných experimentálních dat a zpomaluje se jejich zpracování. Je tedy nutno volit rozumný kompromis.

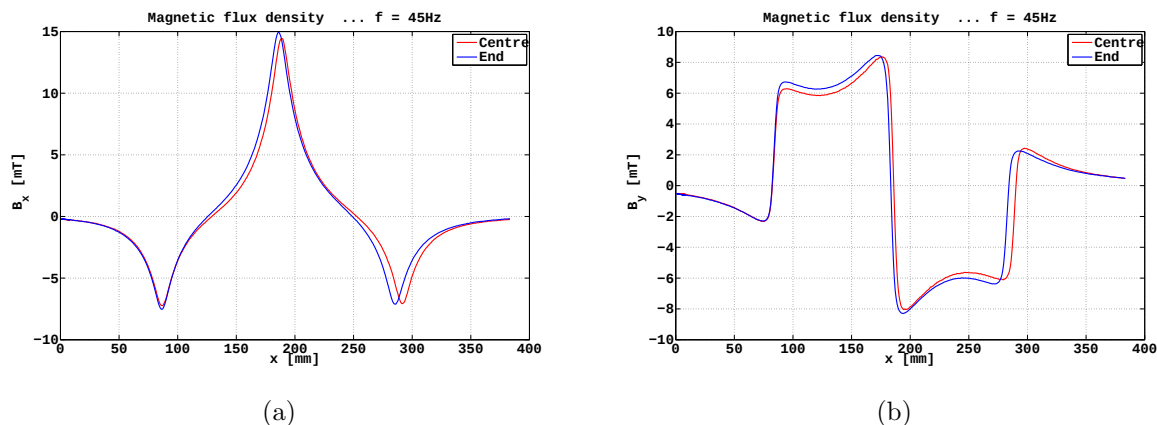
6.3.2 Vliv okolí

S cílem zjistit, do jaké míry můžeme považovat měřený drát za nekonečný, jsme zjišťovali průběh magnetické indukce jednak ve středu přímého masivního vodiče, jednak blízko místa, kde byly vodiče napájeny, přesněji 25 cm od přívodů. Pro nízké frekvence (45 Hz) jsou výsledky na obr. 21a pro vodorovnou složku B_x magnetické indukce. Hlavní kladné maximum je v rovině souměrnosti středního vodiče, dvě postranní záporná minima jsou pro polohu nad středy postranních vodičů. Protože je souměrné napájení vodičů, vodorovná složka magnetické indukce by měla být symetrická. To je v rámci experimentálních chyb na obr. 21a potvrzeno. Rozdíl pro sledované polohy (ve svislém směru) je viditelný, avšak poměrně malý.

Pro svislou složku B_y magnetické indukce a tutéž frekvenci jsou výsledky na obr. 21b. Protože jde o svislou složku, velká magnetická indukce je v mezeře mezi vodiči a mění znaménko. Největší hodnota je v okolí hrany středního vodiče. Průběh je asymetrický vzhledem k rovině souměrnosti, což obr. 21b s odhlédnutím od experimentálních chyb potvrzuje. Rozdíl (ve svislém směru) pro obě polohy je opět viditelný, avšak poměrně malý.

Na obr. 21a i na obr. 21b se křivky neshodují ve vodorovném směru. Odchylka vzrůstá s rostoucí vzdáleností od počátku měření. To lze vysvětlit tím, že vodiče nejsou přesně rovnoběžné. U napájení je jejich rozteč poněkud menší. Z podrobnějších grafů by bylo možné zjistit tuto změnu.

V podstatě tytéž výsledky byly zjištěny pro všechny sledované frekvence a to i pro axiální složku, jejíž přítomnost jsme zpočátku vysvětlovali právě působením přívodů a transformátorů. Můžeme tedy konstatovat, že vliv okolí je na průběh měřeného magnetického pole v prvním přiblížení zanedbatelný.



Obrázek 21: Vliv polohy sondy na průběh magnetické indukce nad vodičem při frekvenci 45 Hz: a) vodorovná složka, b) svislá složka

6.3.3 Vířivé proudy

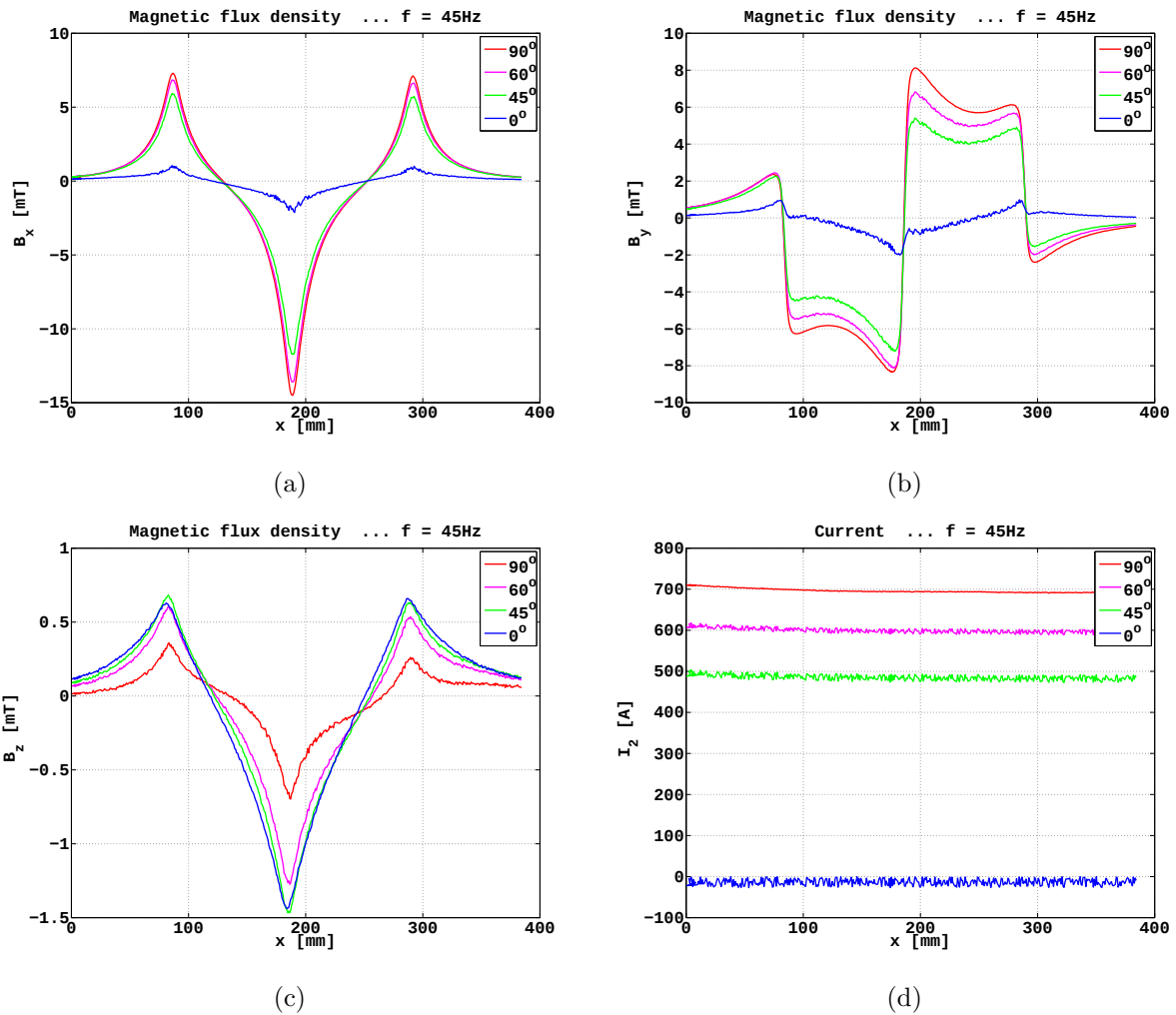
Pokud je ve třívodičové soustavě přímých vodičů buzen jednofázově jen střední vodič, krajními vodiči teče v ideálním případě poloviční zpětný proud s opačnou fází. Ten ve středním vodiči indukuje vířivé proudy. Naopak proud ve středním vodiči indukuje vířivé proudy v krajních vodičích. Vířivé proudy se skládají s proudy vnucenými. Magnetické pole vně vodičů je důsledkem superpozice obou proudů. Vířivé proudy jsou maximální, pokud budící proud prochází nulou a nulové, pokud budící proud prochází lokálním extrémem (maximem či minimem).

Úroveň indukovaných vířivých proudů tedy závisí na fázové konstantě budícího proudu. Pokud je nulová, budící proud se mění nejrychleji a indukované proudy jsou maximální. S jejím růstem úroveň vířivých proudů klesá a při fázové konstantě rovné 90° je jejich úroveň teoreticky nulová, protože se budící proud v tomto okamžiku nemění. To by se mělo projevit v experimentálních datech, pokud budeme volit různě časový okamžik, či fázovou konstantu i pro výběr vzorků.

Průběh všech složek magnetické indukce pro různé volby fázové konstanty při frekvenci 45 Hz je na obr. 22. Parametrem všech křivek je fázová konstanta, které má tytéž hodnoty na všech obrázcích. Protože při popisu odkazujeme na budící proud, jeho průběh pro měřící dráhu je na obr. 22d. Z obr. 22d je zřejmé, že čím je hodnota budícího proudu nižší, tím je více zašuměn. Nulové fázové konstantě neodpovídá přesně nulový budící proud, přesněji budící proud o nulové střední hodnotě, ale malý proud opačného směru. To je způsobeno nízkou frekvencí vzorkování.

Průběh vodorovné složky magnetické indukce B_x na měřené dráze je na obr. 22a. Hodnota složky magnetické indukce je nízká pro nulovou fázovou konstantu a velká pro fázové konstanty nad 45° . Srovnáním s obr. 22d lze říci, že magnetická indukce je úměrná budícímu proudu. To neplatí přesně pro nulovou fázovou konstantu, zde by možná měla být magnetická indukce nižší. U průběhu svislé složky magnetické indukce B_y na obr. 22b. opět překvapuje poměrně vysoká hodnota této složky pro opravdu nízký budící proud. Jinak je zde zhruba úměra.

Průběh axiální (podélné) složky magnetické indukce B_z je na obr. 22c. Tento průběh je zdánlivě v rozporu s očekávanými výsledky. V první řadě by tato složka neměla existovat. Za druhé její závislost na budícím proudu (obr. 22d) je opačná. Při nejvyšším budícím proudu je



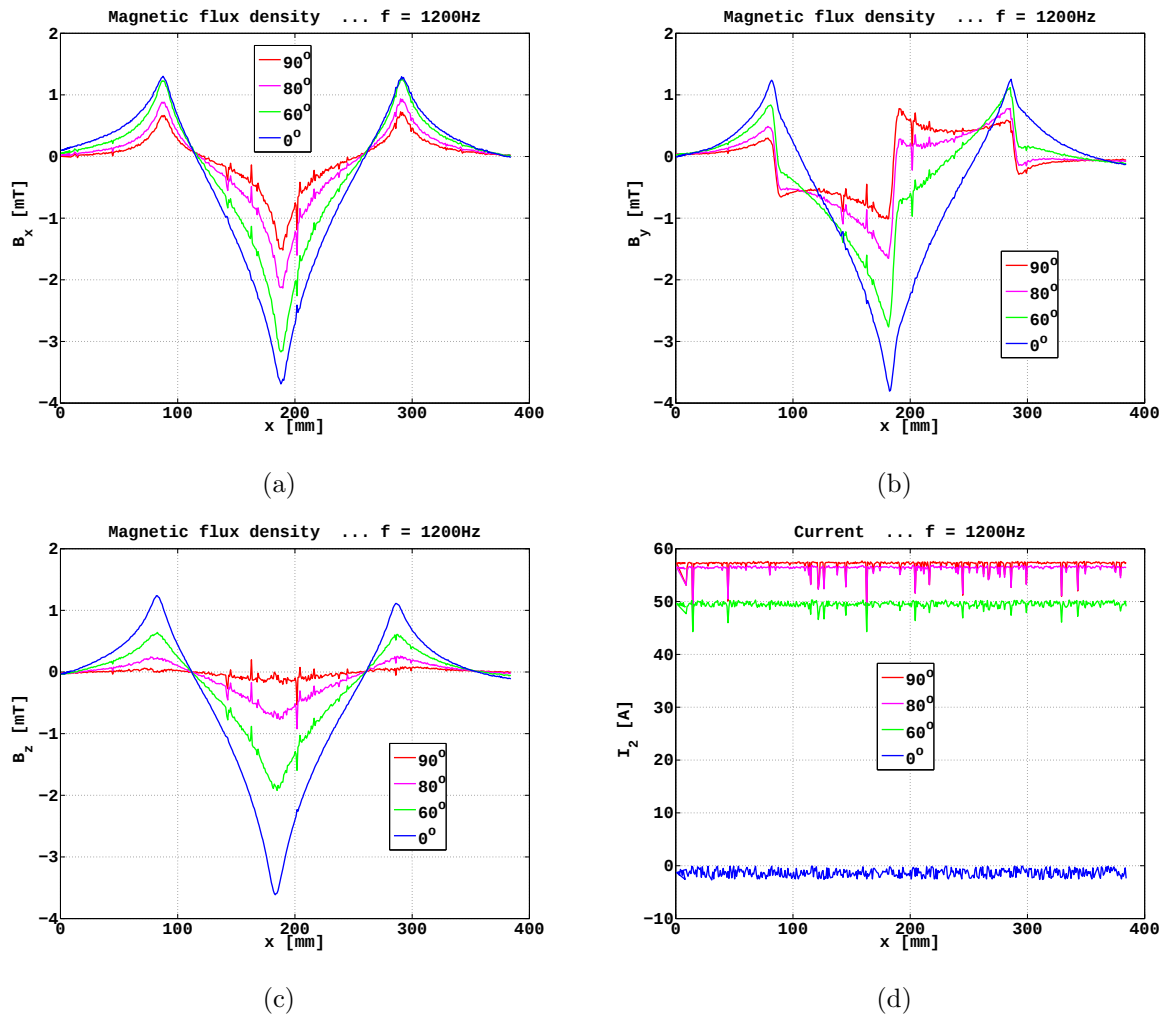
Obrázek 22: Průběh magnetických veličin různé fázové konstanty při frekvenci 45 Hz: a) vodorovná složka, b) svislá složka, c) axiální složka, d) budící proud

buzené magnetické pole nejslabší a při nejnižším buzení naopak nejsilnější.

Tento zdánlivý paradox lze vysvětlit tím, že magnetické pole této složky je prakticky buzeno vířivými proudy. Při fázové konstantě 90° vířivé proudy jsou prakticky nulové, axiální složka je buzena jen vnučenými proudy, a proto je nejnižší. Při fázové konstantě 0° jsou vířivé proudy nejsilnější a magnetická indukce je prakticky buzena jen jimi, proto je nejvyšší.

Všechny tyto jevy jsou daleko výraznější při nejvyšší budící frekvenci 1200 Hz. Všechny důležité průběhy pro poněkud jiné volby fázové konstanty jako parametr jsou na obr. 23. Průběhy na tomto obrázku 22 se liší jen frekvencí.

Průběh vodorovné složky magnetické indukce B_x pro frekvenci budícího proudu 1200 Hz je na obr. 23a. Obecně lze říci, že hodnoty této složky magnetické indukce jsou nepřímě úměrné budícímu proudu. Při nejvyšším budícím proudu je magnetická indukce nejnižší a při nejnižším buzení je paradoxně nejvyšší. Pokud bereme za fakt, že se na výsledném magnetickém poli podílí též magnetické pole vyvolané vířivými proudy, tak je vše v pořádku. Při fázové konstantě 90° jsou vířivé proudy teoreticky nulové a magnetické pole je buzeno jen proudy vtištěnými. Jeho indukce je nejnižší. S poklesem fázové konstanty se stále více na výsledném magnetickém poli



Obrázek 23: Průběh magnetických veličin různé fázové konstanty při frekvenci 1200 Hz: a) vodorovná složka, b) svislá složka, c) axiální složka, d) budící proud

podílí vířivé proudy a jeho indukce stoupá. Při nulové fázové konstantě je pak maximální.

Průběh svislé složky magnetické indukce B_y na měřené dráze je na obr. 23b. Zde je vliv vířivých proudů ještě zajímavější. Porovnejme tento obrázek s obrázkem 22b, který se liší jen nízkou frekvencí 45 Hz. Při fázové konstantě 90° jsou oba průběhy velmi podobné, vliv vířivých proudů je malý i při nejvyšší frekvenci. Jakmile se ale fázová konstanta poměrně málo sníží, podle obr. 23b na 80° , průběh svislé složky magnetické indukce se vířivými proudy výrazně deformuje. Tato deformace se zvyšuje s dalším poklesem fázové konstanty, takže původní průběh se hledá stále obtížněji. Na druhé straně i při její nulové hodnotě lze nalézt příspěvek od budícího proudu (dosti strmé úseky). Její průběh se v tomto speciálním případě, co do tvaru, plně neshoduje s průběhem axiální složky na obr. 23c, i když se mu dosti podobá.

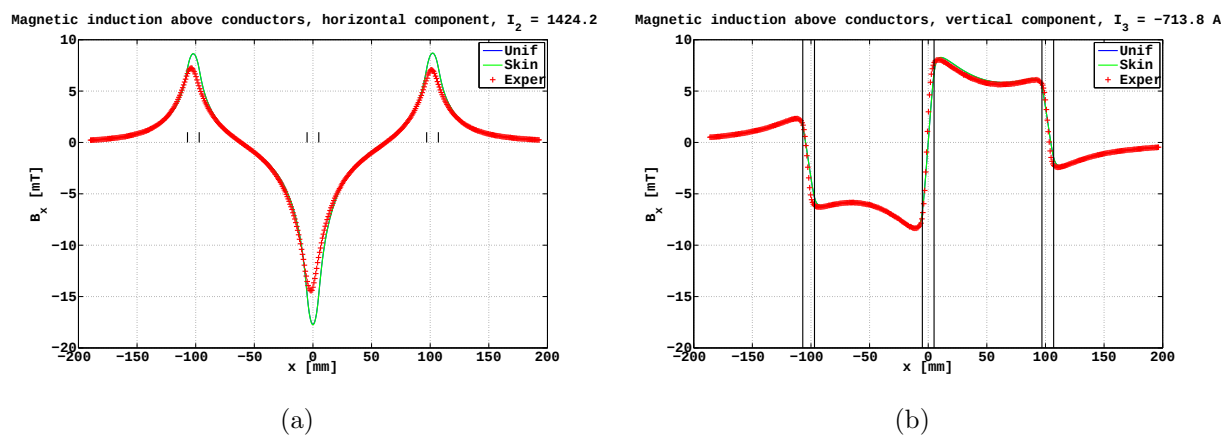
Průběh axiální (podélné) složky magnetické indukce B_z je na obr. 23c. Tvarem se křivky pro nízkou, zejména nulovou, fázovou konstantu neliší od křivek pro nízkou frekvenci 45 Hz na obr. 22c. Hodnoty magnetické indukce jsou ale vyšší, i když je budící proud o řád nižší. To lze opět vysvětlit jen tím, že se jedná o magnetické pole buzené v podstatě pouze vířivými proudy. S rostoucí frekvencí jsou časové změny budícího proudu stále vyšší a indukované proudy stále

silnější. To se projeví i na indukci magnetického pole, které budí. Výrazný vliv vířivých proudů potvrzuje i skutečnost, že i v tomto případě jsou hodnoty magnetické indukce pro fázovou konstantu 90° malé.

Všechny průběhy magnetické indukce pro frekvenci 1200 Hz na obr. 23a-c, obsahují výrazné poruchy, které spolu navzájem korelují. Ani budicí proud na obr. 23d není konstantní, často se objevuje ostrý pokles hodnoty až o 10 %. Podrobným porovnáním lze ale ukázat, že spolu nekorelují poruchy magnetické indukce a náhlé poklesy proudu.

6.3.4 Porovnání s experimentem

Protože teoreticky umíme započítat jen vliv skinefektu, můžeme porovnávat a vypočtené průběhy magnetické indukce s naměřenými jen pro fázovou konstantu 90° . Porovnání pro podélnou složku B_x pro nízkou frekvenci 45 Hz je na obr. 24a a pro svislou složku B_y při téže frekvenci 45 Hz na obr. 24b.



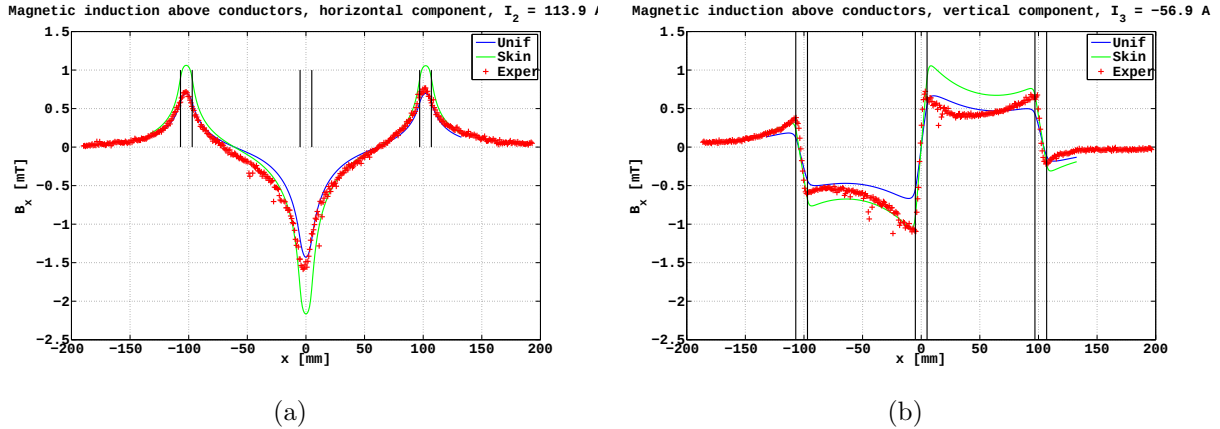
Obrázek 24: Porovnání teorie a experimentu pro magnetickou indukci nad vodičem při frekvenci 45 Hz: a) vodorovná složka, b) svislá složka

Na těchto obrázcích 24a a 24b je naznačena poloha vodičů krátkými nebo dlouhými svislými čarami. Jsou zde dva grafické průběhy. Jednak je to vypočtená teoretická hodnota magnetické indukce pro rovnoměrné rozložení proudu ve vodiči (stejnoseměrný proud), jednak pro průchod střídavého proudu při frekvenci 45 Hz. Skinefekt se prakticky neuplatní, obě křivky jsou téměř totožné. Experimentální výsledky jsou ve formě bodů.

Pro vodorovnou složku B_x na obr. 24a je souhlas dobrý s výjimkou krátké oblasti nad vodiči. Zde je naměřená hodnota nižší. To lze částečně vysvětlit průměrujícím účinkem čidla v Hallově sondě, které má sice malé, ale konečné rozměry. Magnetická indukce se v těchto místech mění poměrně rychle. Kromě toho nemusí být přesně provedena korekce na polohu čidla v pouzdře sondy.

Pokud jde o svislou složku B_y na obr. 24b, je souhlas dobrý v celé měřené oblasti. Pro nízké frekvence tedy dostáváme dobrý souhlas mezi teorií a experimentem. Zde se ovšem neprojevuje skinefekt a vířivé proudy jsou slabé.

Porovnání pro obě složky při nejvyšší frekvenci 1200 Hz je na obr. 25a pro vodorovnou složku B_x a na obr. 25b pro svislou složku B_y . Na teoretických křivkách se skinefekt nyní projevuje, magnetická indukce je v absolutní hodnotě vyšší, protože proud teče v blízkosti povrchu vodiče.



Obrázek 25: Porovnání teorie a experimentu pro magnetickou indukci nad vodičem při frekvenci 1200 Hz: a) vodorovná složka, b) svislá složka

Pokud jde o souhlas pro vodorovnou složku B_x na obr. 25a, teoretické křivky se liší jen v oblastech nad vodiči a zde není souhlas s experimentem ani při nízkých frekvencích, viz obr. 24a. Proto nemůžeme učinit žádný závěr.

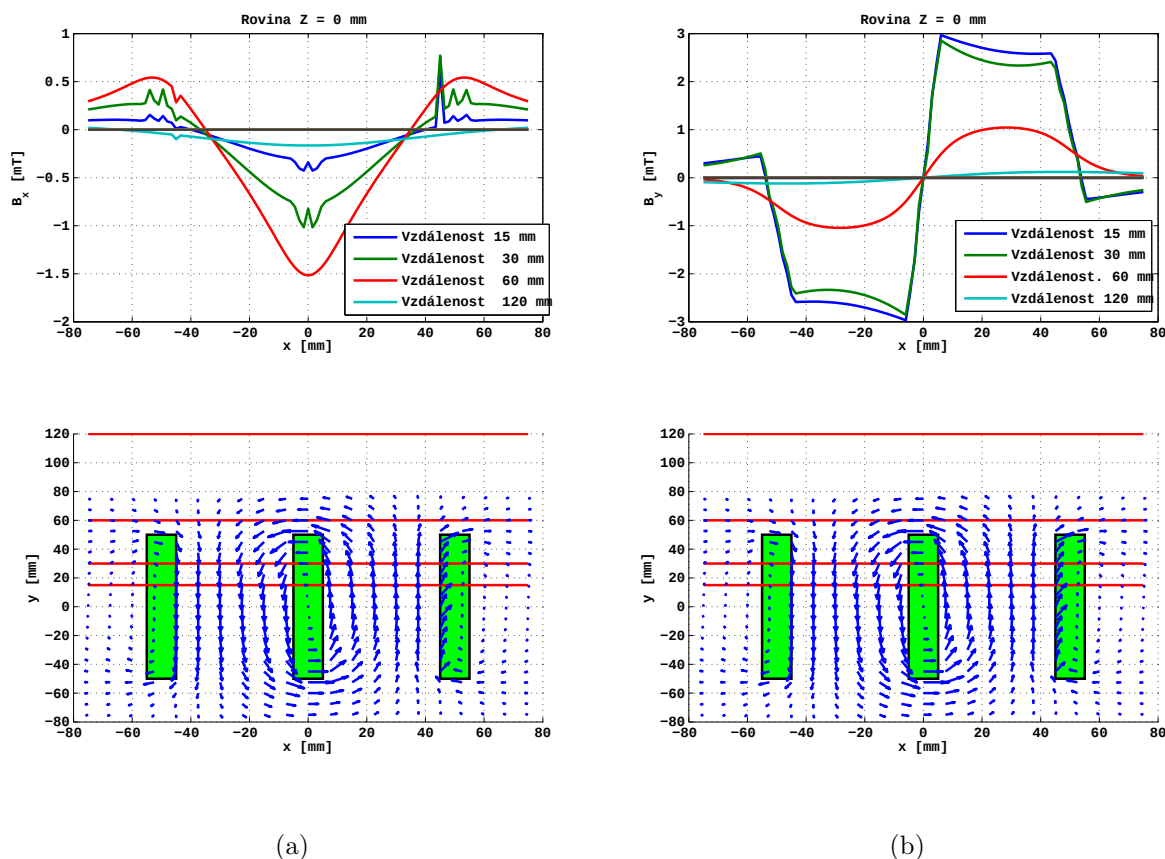
Pro svislou složku B_y na obr. 25b se obě teoretické křivky liší v celé oblasti, nikoliv však nijak výrazně. Experimentální body nejsou, na rozdíl od teoretických křivek, rozloženy asymetricky a navíc zatíženy značným šumem. Odchylka od asymetrického rozložení však může být způsobena slabými vířivými proudy. V levé části jsou blíže křivce pro skinefekt, v pravé pro rovnoměrně rozložený proud. V důsledku malé přesnosti experimentu se skinefekt nedá jednoznačně experimentálně prokázat. Chyba ale může být i v teorii, která neuvažuje, přesněji nedokáže zahrnout, vliv vířivých proudů.

6.4 Trojfázové magnetické pole

Ověrovací experimenty jsme provedli s měřením magnetického pole při napájení všech tří přímých vodičů ze symetrické trojfázové soustavy. Dobrý souhlas mezi teorií a experimentem byl jen pro nejnižší frekvence. Důvodem byly vířivé proudy. Proto jsme vzápětí přešli na měření s delším posuvem a s jednou aktivní fází. Tomu je věnována rozsáhlá předchozí část 6.3.

V oblasti trojfázového magnetického pole jsme však provedli řadu výpočtů s cílem seznámit se podrobně s jeho průběhem. K tomu sloužily obrázky s vektorovým průběhem a parametrickým zobrazením složek na zvolených řezech. Příklad je na obr. 26. V dolní části jsou vektory magnetické indukce. Dále jsou v této oblasti naznačeny řezy. Pro tyto řezy se pak v horní části zobrazí průběhy zvolené složky, tedy parametrické grafy. Na obrázku 26a je vodorovná složka B_x magnetické indukce a na obr. 26b je svislá složka B_y . Tato složka magnetické indukce se uvnitř vodiče mění lineárně a mezi vodiči je v prvním hrubém přiblížení konstantní.

Řezy na obr. 26 procházejí i vodiči. Pokud se má uvnitř nebo na povrchu vodiče vypočíst spolehlivě složka magnetické indukce, je nutno při numerické integraci vzít daleko větší počet bodů, případně upravit polohu elementů, abychom se vyhnuli singularitám. Protože byl použit standardní počet bodů odzkoušený pro výpočet vně vodiče, dochází k chybám. Ty jsou na parametrických křivkách pro vodorovnou složku B_x viditelné. Pro případ svislé složky B_y magnetické indukce v těchto řezech je numerická integrace vyhovující, k chybám nedochází ani pro



(a)

(b)

Obrázek 26: Magnetického pole v oblasti tří vodičů při buzení z trojfázové sítě a) vodorovná složka, b) svislá složka

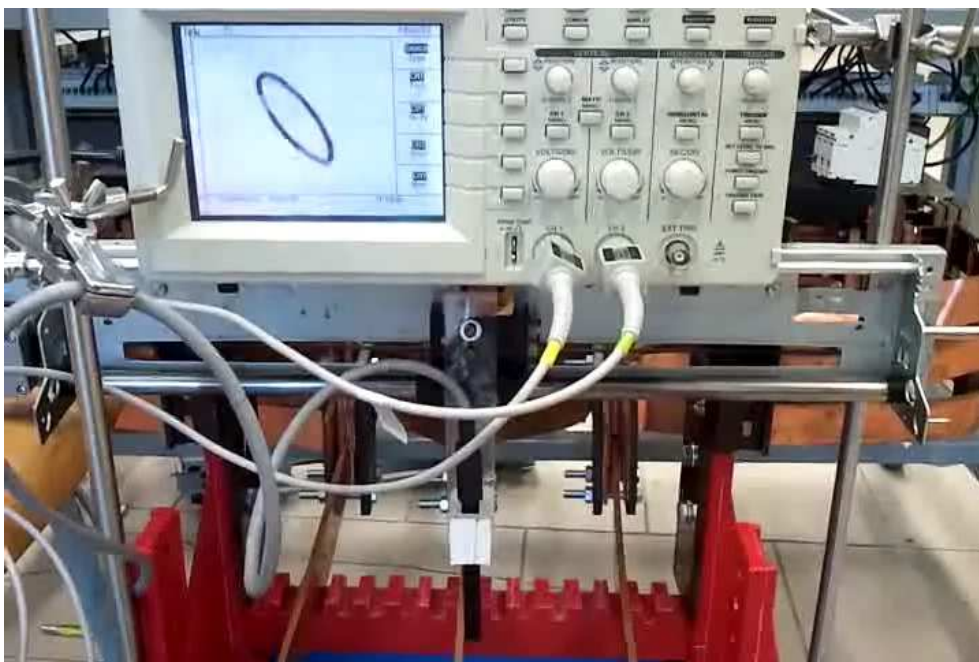
výpočet uvnitř vodičů nebo na jejich povrchu.

Obrázky typu 26 byly vygenerovány pro postupně rostoucí čas. Z této sekvence byla připravena simulace časového průběhu ve formě videa. Z ní vyplynulo, že v okolí vodičů je rotační magnetické pole. Jeho existence byla prokázána experimentálně pro silné budící proudy při nízkých frekvencích. Experimentální uspořádání je na obr. 27.

7 Diskuse

Základním výsledkem teoretické části je odvození přibližného analytického vztahu pro skinefekt v nekonečné tyči obdélníkového profilu. Proud teče ve směru její osy Z . Při tomto odvození jsou diskutabilní okrajové podmínky. Pro jednoduchost jsme předpokládali, že proudová hustota je konstantní na povrchu tyče. Jinak bychom asi nedospěli k jednoduchému analytickému řešení. Toto řešení se skládá ze tří členů: jeden nelineární člen obsahuje součin hyperbolických funkcí proměnné x a y . Další dva členy obsahují jen samostatnou hyperbolickou funkci proměnné x a analogicky umístěnou hyperbolickou funkci proměnné y .

Předpoklad konstantního povrchového proudu je splněn na nekonečné tyči kruhového průřezu a to z důvodu válcové symetrie. Platí samozřejmě i pro případ stejnosměrného proudu. Tedy



Obrázek 27: Experimentální ověření točivého magnetického pole.

tento předpoklad určitě přibližně platí pro nízké frekvence. Otázkou však zůstává, kde je přijatelná hranice.

Pravidelnou literární rešerší jsme nedávno objevili, že asi před rokem byl na konferenci publikován příspěvek zabývající se shodným problémem [9], výpočet proudové hustoty v příčném průřezu pravoúhlé tyče, pokud se proud šíří ve směru její osy Z . Počáteční postup řešení příslušné diferenciální rovnice je shodný, ale v obecném výsledku, který obsahuje pouze součin hyperbolických funkcí, se předpokládají dva rozdílné koeficienty v argumentu hyperbolických funkcí, jiný pro směr v ose X a jiný pro směr v ose Y . Mezi nimi je kvadratický vztah. Ukázali jsme, že pro stejné koeficienty dostaneme přesně součinný člen v našem odvození. Koeficienty jsou pak útlumové konstanty. Okrajové podmínky, rozměry příčného průřezu vodiče, lze v tomto případě přibližně započíst pro nízké frekvence tak, že se koeficienty vynásobí bezrozměrnou funkcí rozměrů vodiče.

Obě řešení tedy platí pro nízké frekvence. Alternativní řešení vede k proměnné proudové hustotě na povrchu vodiče. Nejsilnější proud by měl téct v okolí hrany. Proudová hustota na hraně je ale nespojitá, jiná je vodorovná a jiná je svislá limita na povrchu vodiče. To může představovat fyzikální problém. Autor publikace [9] je si této skutečnosti vědom.

Několikrát jsme se zmínili, že jediným jednoduchým způsobem, jak prokázat vliv skinefektu, je měření magnetického pole v okolí vodiče. Při výpočtu jsme dali přednost integrální formulaci, která má několik nesporných výhod. Především jsou automaticky splněny okrajové podmínky, zejména v nekonečnu. Výpočet lze provést jen v přesně definovaných bodech. Pro složitější tvar vodiče se použije numerická integrace. Naprogramování v MATLABu je poměrně jednoduché a snadno se odhalí případná chyba. V počáteční fázi někdy na ni upozorní i interpret příkazů. Snadno se v MATLABu získají různé typy grafických výstupů — parametrický graf, rozložení vektorů, indukční čáry. Jedinou nevýhodou je pomalý výpočet, mj. proto, že MATLAB je interpretační jazyk, což je zde nevýhodou. Numerický výpočet byl však relativně krátký díky

tomu, že podstatnou část numerické integrace nahradil analytický výpočet. To však je možné jen pro přímý masivní vodič. Pro kruhový vodič se žádný analytický výraz nenalezne a integraci je nutno důsledně provádět numericky. Tím čas nutný pro výpočet stoupá.

V experimentální části byla na začátku řešení k dispozici část aparatury obsahující tři výkonové jednofázové transformátory s připojenými masivními vodiči. Budící zdroj, měřicí přístroje, Hallovu sondu atd. bylo nutno doplnit. Rovněž tak bylo nutno připravit software pro řízení a sběr dat. Připravená část aparatury byla současně výhodou i nevýhodou.

Velkou nevýhodou aparatury byl silný pokles výstupního proudu s rostoucí frekvencí. Při nejvyšší možné frekvenci, kde se začal výrazně projevovat skin efekt, bylo proudové buzení vodičů slabé a slabé magnetické pole bylo zatíženo velkou chybou, která znemožnila přesné porovnání teorie a experimentu. Ukázali jsme, že chyba byla ve výkonových transformátorech, které byly asi navrženy jen pro frekvenci výkonové sítě 50 Hz. S rostoucí frekvencí přenos proudu silně klesal. Přitom by nemělo být problémem navrhnout transformátor se zhruba konstantním přenosem v pásmu do 1 kHz. Připomeňme výstupní transformátor u starých elektronkových radiopřijímačů. Ten transformoval vstupní proud řádu desítek mA na výstupní proud řádu ampér ve frekvenčním pásmu od 20 Hz do 20 kHz. Na druhé straně návrh a zejména realizace těchto transformátorů jsou finančně i časově náročné.

Alternativní řešení by bylo přejít na nižší frekvence, např. 600 Hz a použít vodič o větších rozměrech. Při zvolené poloviční frekvenci by však rozměry vodiče musely být čtyřikrát větší, což by asi nebylo realizačně snadné. Na druhé straně lze při krajní frekvenci pomocí odboček na primáru snížit počet primárních závitů na polovinu i méně a tím dosáhnout vyšších proudů na sekundáru. Znamená to ale zásah do profesionálně vyrobené aparatury.

V experimentech jsme se soustředili na experimentální ověření teoretických vztahů pro skin efekt. Ověření jsme realizovali ve dvou směrech: měření elektrického napětí na povrchu vodiče, ale zejména měření magnetického pole v jeho okolí. Brzy se ukázalo, že trojfázové buzení není vhodné, protože se uplatňovaly výrazně vířivé proudy. V našich možnostech výrazná rekonstrukce aparatury nepřicházela v úvahu, proto jsme střední vodič budili jednofázově. V tomto zapojení jsme provedli řadu experimentů.

Při měření úbytku napětí na povrchu vodiče jsme vypracovali metodu, jak eliminovat indukované napětí. Výsledky zprvu ukazovaly, že elektrické pole je na povrchu vodiče konstantní v souladu s našimi předpoklady. Bližší rozbor však ukázal, že jsme volili příliš velkou vzdálenost mezi sondami, 1 m. Elektrické pole na tak dlouhém úseku nemůže být homogenní. Ve skutečnosti jsme měřili odpor vodiče. Ten s rostoucí frekvencí stoupal, což lze považovat za potvrzení skin efektu. Kvantitativní teoretické a experimentální výsledky však nesouhlasily. Příčinu jsme zatím nezjistili.

V principu je možné měření elektrického pole na povrchu vodiče. Vzdálenost mezi sondami však musí být malá, maximálně 10 mm. Pak je ale úbytek napětí malý a v našich podmínkách asi neměřitelný. Hlavním problémem je odstranění šumu a rušení.

Zbylo tedy jen vyhodnocení experimentů měřících vnější magnetické pole. Důležité bylo zjištění, že vodič se přibližně chová jako osamocený, lze tedy aplikovat teoretické vztahy. Vyhodnocením jsme z naměřených dat také zjistili, že vířivé proudy se výrazně uplatní i v zapojení s jednou aktivní fází. Na mnoha grafech jsme ukázali, jak se vířivé proudy projeví na vnějším magnetickém poli a jak změny průběhy magnetické indukce vyvolané vnucenými proudy. Jejich existenci lze mj. vysvětlit významnou axiální složkou magnetické indukce.

Ukázali jsme také, že naše metoda výběru vzorků v okamžiku maxima budícího proudu vířivé proudy úspěšně eliminuje a je možné zkoumat skin efekt. Bohužel, při nejvyšší frekvenci

byl budící proud tak malý, že se experimentálně nepodařilo jednoznačně vliv skinefektu na vnější magnetické pole prokázat.

V práci jsme se více soustředili na vyšetřování skinefektu, protože jsme chtěli ověřit odvozený analytický vztah. Také lze v tomto případě použít spolehlivou metodu numerické integrace pro výpočet magnetického pole při libovolném rozložení proudu ve vodiči.

Experiment však jednoznačně prokázal, že klíčovou roli hrají vířivé proudy a to i při relativně nízkých frekvencích. Na rozdíl od skinefektu nemáme analytický vztah pro výpočet rozložení proudů ve vodiči s pravoúhlým průřezem při působení vířivých proudů. Zavedení vířivých proudů představuje tedy dynamickou úlohu. Jediným efektivním přístupem v tomto případě je použití metody konečných prvků (MKP). V disertační práci jsme představili některé aplikace pomocí systému COMSOL Multighysics. Jednalo se však především o prozkoumání možností tohoto systému a odzkoušení prostupu pro naši úlohu. Tyto uvedené výsledky jsou jen orientační. Podrobně jsme je nezkoumali, ani nijak nezpracovali a ani je nepoužili v jiných částech práce, i když by možná vedly k názornější představě o zkoumaných jevech.

Na druhé straně naše námaha, zejména v oblasti numerické integrace, nebyla vynaložena zbytečně. Teorie i experiment potvrzují, že na aparatuře se vířivé proudy a skinefekt začaly výrazně projevovat až při frekvenci nad 400 Hz. To znamená, že pro síťovou frekvenci 50 Hz lze používat integrační přístup k výpočtu magnetického pole s rovnoměrně rozloženou proudovou hustotou.

8 Závěr

Tato převážně experimentální práce se zabývá studiem kvazistacionárního elektromagnetického pole v experimentálním modelu rozvodny. V teoretické části se soustředila na rozbor působení skinefektu a vířivých proudů. Pro použité vodiče byl nalezen přibližný analytický výraz pro skinefekt. Ten se poněkud lišil od vztahu nedávno publikovaného pro tentýž typ vodiče. Pro vířivé proudy asi podobný jednoduchý vztah neexistuje, protože jde již o příliš složitý systém. Jelikož jediné snadné ověření předpokládaného rozložení proudu ve vodiči je pomocí vnějšího magnetického pole, byly připraveny metody pro jeho rychlý výpočet numerickou integrací.

Experiment se soustředil převážně na měření vnějšího magnetického pole. Hlavním nedostatkem aparatury bylo poměrně slabé proudové buzení při frekvencích, kde se skinefekt projevoval nejvíce. Přičítáme je nevhodně navrženým transformátorům. Na druhé straně se nám úpravou elektronického obvodu podařilo zvýšit citlivost a přesnost měření slabých magnetických polí komerční 3D Hallovo sondou. Práce se také zabývala měřením úbytku napětí na povrchu vodiče s cílem ověřit okrajové podmínky použité při odvození analytického výrazu pro skinefekt. Při vhodné rozteči sond však bylo toto napětí příliš malé na to, aby se dalo změřit s přijatelnou chybou. Ověřili jsme však, že odpor vodiče s rostoucí frekvencí stoupá.

Studium vnějšího magnetického pole se soustředilo na režim s jednou aktivní fází. Magnetické pole bylo slabé zejména při vyšších frekvencích, proto jsme pro odstranění poruch z naměřených dat použili frekvenční analýzu. V naměřených průbězích magnetické indukce se výrazně projevoval vliv vířivých proudů i v tomto zjednodušeném zapojení. Jejich vliv na průběh magnetického pole je také při systematickém vyhodnocování experimentu v práci podrobně popsán. Vhodným výběrem vzorků v časové oblasti jsme dokázali vliv vířivých proudů podstatně potlačit a tak získat experimentální data, která zahrnují jen vliv skinefektu. Bohužel, v důsledku slabých budících proudů jsou data zatížena značnou chybou, takže se vliv skinefektu nepodařilo jednoznačně prokázat ani v tomto případě. Nešlo tudíž ani posoudit, které z teorií

je experiment blíže. Postup je však správný, jde jen o odstranitelný technický nedostatek.

Praktickým výsledkem je mj. to, že jsme ukázali, že pro frekvence asi do 400 Hz je vliv vířivých proudů při použité geometrii slabý. Lze tedy použít všech metod numerické integrace pro sledování vnějších magnetických polí. Rozložení proudů ve vodiči lze považovat za rovnoměrné.

Pokud se jedná o vytyčené cíle, lze je pokládat za splněné, i když někdy byly výsledky trochu jiné, než se očekávalo. Z časových důvodů jsme se nemohli podrobně ani experimentálně, ani teoreticky, zabývat oteplováním vodičů, i když je to pro praxi důležité a v literatuře se to sleduje.

Práce řeší aktuální problematiku, jak teoreticky, tak experimentálně. To mj. dokazuje skutečnost, že obdobný vztah k tomu, který byl v práci odvozen, byl nedávno publikován. Experimentálně se zatím nepodařilo prokázat, který z nich odpovídá lépe skutečnosti, i když jsme se o to pokoušeli jak měřením úbytku napětí na povrchu vodiče, tak z průběhu vnějšího magnetického pole.

Další pokračování v této zajímavé a prakticky důležité oblasti výzkumu by se mělo soustředit zejména na tyto problémy.

- Dosažení silnějšího buzení vodičů při vysoké frekvenci. Pravděpodobně bude nutno navrhnout a realizovat vhodnější transformátor. Pak bude mj. možné experimentálně ověřit vztahy popisující skinefekt.
- Kriticky posoudit možnost měření úbytku napětí na povrchu vodiče při malé vzdálenosti sond.
- Aplikovat systém COMSOL Multiphysics k teoretickému výpočtu vlivu vířivých proudů. To mj. umožní posoudit jejich vliv na vnější magnetické pole.
- Teoretické i experimentální studium oteplování povrchu vodičů.

S ohledem na praktický význam řešených problémů, lze očekávat zájem a podporu z technické praxe.

Literatura

- [1] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha, 1975.
- [2] Sedlák, B., Štoll, I: Elektrina a magnetismus, 1. edice, Academia a Karolinum, 1993. ISBN 80-200-0172-7.
- [3] Inan U, S, Inan A, S.: Engineering electromagnetics, published in Menlo Park, California, Addison-Wesley, Inc.
- [4] Maxwell, J. C.: A treatise on electricity & magnetism, Vol. 1. 3rd edition, 1954. Dover Publications Inc., New York. ISBN 0-486-60636-8.
- [5] Maxwell, J., C.: A treatise on electricity & magnetism, Vol. 2. 3rd edition, 1954. Dover Publications Inc., New York. ISBN 0-486-60637-8.
- [6] Dwight, H., B.: Electrical Coils and Conductors, The Maple Press Company, New York.
- [7] Langer, M.: Teorie indukčního a dielektrického tepla, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1964.
- [8] Mayer, D. - Ulrych, B.: Povrchový jev ve vodiči protékaném časově harmonickým proudem, Elektrotechnický časopis, 1988, roč. 39, č. 7, s. 498-509, ISSN 0037-668X.
- [9] Gerling, D.: Approximate analytical calculation of the skin effect in rectangular wires, Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on, pp.1-6, 15-18 Nov. 2009.
- [10] Gerling, D.: Analysis of the magnetomotive force of a three-phase winding with concentrated coils and different symmetry features, Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008, pp.2832-2837, 17-20 Oct. 2008.
- [11] Jafari-Shapoorabadi, R.- Konrad, A. - Sinclair, A.: Comparison of Three Formulations for Eddy-Current and Skin Effect Problems, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, March 2002.
- [12] Imamura, M.- Nakahara, M.- Yamaguchi, T. - Tamura S.: Analysis of Magnetic Fields Due to Three-Phase Bus Bar Currents for the Design of an Optical Current Transformer, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 4, July 1998.
- [13] Imamura, M. - Tokubuchi, M.: Magnetic Field Analysis for the Used for Three-phase Bus-Bars Arranged Longitudinally Optical Current-Transformer, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 5, September 1996.
- [14] Fawzi, T.H. - Burke, P. E. - Lau, T.C.H.: Bie Analysis of Eddy Current Losses in Rectangular Busbars in Nonuniform Field, IEEE Transactions on Magnetics, Vol Mag-18, No. 6, November 1982.
- [15] Pfothner, J.M.; Blanchard, J.P.; Martin, C.J.: Eddy current heating in micro-SMES bus-bars, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol.15, no.2, pp. 1939 - 1942, June 2005.

- [16] R. M. Del Vecchio Eddy current losses in a Conducting Plate Due to a Collection of Bus Bars Carrying Currents of Different Magnitudes and Phases,IEEE Transactions on Magnetism, Vol. 39, No. 1, January 2003.
- [17] Jain, M. P.- Ray,L. M.:Field Pattern and Associated Losses in Aluminum Sheet in Presence of Strip Bus Bars,IEEE Transaction On Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-89, No. 7, September/October 1970.
- [18] Y. Yanyou, Y. - Renyuan T. - Yan L.: Eddy Current Fields and Overheating Problems due to Heavy Current Carrying Conductors,IEEE Transactions on Magnetism, Vol.30, No. 5, September 1994.
- [19] Brauer, J.; Finite element calculation of eddy currents and skin effects, IEEE Transactions on Magnetism , vol.18, no.2, pp. 504- 509, Mar 1982.
- [20] Piatek, Z.- Kusiak, D. - Szczgielniak, T. : The magnetic field of screened flat three-phase high current busduct, AMTEE'09 - Advanced methods in the theory of electrical engineering, Plzeň, 2009, ISBN 978-80-7042-821-3.

Vlastní publikace

- [1] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Skin effect in massive conductors at technical frequencies. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)*, Vol. 87, No 5, 2011, pp. 179-185.
- [2] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Detailed and complete description of skin effect. *Slaboproudý obzor*, vol. 64, 2008, pp. 25-28, ISSN 0037-668X (in Czech).
- [3] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Skin-effect – complex solution. *STO - 10 - Modern ways teaching of electrical engineering and electronics*, Brno, 2008, pp. 87-90, ISBN: 978-80-7231-554-3 (in Czech).
- [4] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Surface phenomena in AC low voltage bus bars. *EPVE - Electrical Drives of Power Electronics*, Brno, 2008, pp. 17, ISBN 978-80-7204-603-4.
- [5] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: The Skin Effect within Three Phase 50 Hz Power Net with High Current Load. *ECMS - 9th International Workshop on Electronics, Control, Modeling, Measurement and Signals*, Mondragon, Spain, 2009, pp. 197- 202, ISBN 978-84-608-0941-8.
- [6] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Technical calculation, modeling and visualization of 3D magnetic field. *TCP - Technical computing Prague*, Praha, 2009, pp. 105, ISBN 978-80-7080-733-0.
- [7] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Fast numeric calculation of massive conductor 3D magnetic field. *AMTEE - Advanced methods in the theory of electrical engineering*, Plzeň, 2009, pp. I17-I18, ISBN 978-80-7042-821-3.
- [8] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Magnetic field of massive conductor at low frequency, *CPEE - Computational problems of electrical engineering*, Plzeň, 2010, pp. 12, ISBN 978-80-7043-899-2.
- [9] Kosek, M. – Truhlar, M. – Richter, A.: Electromagnetic shielding with the textile structures. *TEXSCI - 7th International Textile Science*, Liberec, 2010, pp. 5, ISBN 978-80-7372-635-5.
- [10] Truhlar, M. – Kosek, M. – Richter, A.: Experimental and Theoretical Study of Effect in Power Distribution Net. *Measurement 2011 - Proceedings of the 8th International Conference on Measurement*, Bratislava, Slovakia, 2011, pp. 170-173, ISBN 978-80-969-672-4-7.
- [11] Truhlar, M. - Kosek, M - Richter, A.: Microwave Properties of Plane Textiles with Varying Contents of Metal Fibers. In *13th International Symposium on Microwave and Optical Technology - ISMOT 2011*. Praha, 2011.

Ing. Martin Truhlář

Nerovnoměrné rozložení proudové hustoty v třífázové rozvodné síti

Autoreferát disertační práce

Technická univerzita v Liberci

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

37 stran

Náklad: 20 výtisků

červenec 2011