TU v LIBERCI FAKULTA MECHATRONIKY

POŽADAVKY pro přijímací zkoušky z MATEMATIKY

<u>Tematické okruhy středoškolské látky:</u>

- Číselné množiny **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**. Body a intervaly na číselné ose. Absolutní hodnota. Úpravy algebraických výrazů (složené zlomky), mocniny s lomenými i zápornými exponenty.

- Lineární, kvadratické a racionální (ne)rovnice. Soustavy dvou (tří) lineárních rovnic. (Ne)rovnice s absolutní hodnotou. Jednoduché iracionální (ne)rovnice.

- Základní funkce a jejich grafy, speciálně funkce lineární (význam směrnice), kvadratická, exponenciální, logaritmická, funkce goniometrické. (Ne)rovnice obsahující exp, log, gon.

- Posloupnost aritmetická, geometrická, vyjádření n-tého členu, součet n členů. Trojčlenka. Procentový počet, jednoduché úlohy.

- Komplexní čísla (aritmetický, algebraický, goniometrický zápis), počítání s komplexními čísly, geometrický význam operací (sčítání a násobení), Moivreova věta.

- Planimetrie. Trojúhelníky, čtyřúhelníky, kružnice, shodnost, podobnost. Věta Thaletova, Pythagorova, Eukleidovy věty a jejich užití při řešení konstruktivních úloh.

- Základní geometrické útvary v prostoru: přímka, rovina, vzájemné polohy; jednoduchá tělesa: čtyřstěn, hranol, krychle, koule, válec, jejich povrchy a objemy.

- Analytická geometrie v rovině: rovnice přímky, průsečík přímek, atd., rovnice kuželoseček v základních polohách (kružnice, elipsa, parabola, hyperbola).

POŽADAVKY pro přijímací zkoušky z MATEMATIKY na FM

Milí zájemci o studium na FM,

přikládáme Vám „demo verzi“ přijímacího testu z matematiky včetně podrobného popisu řešení a stylu jeho zápisu. Jsme si vědomi, že úlohy lze samozřejmě řešit i jinými postupy, než jaké jsme zde uvedli. Doufáme, že Vás touto ukázkou inspirujeme k pečlivé přípravě.

Mnoho úspěchů při přijímacím testu vám přeje

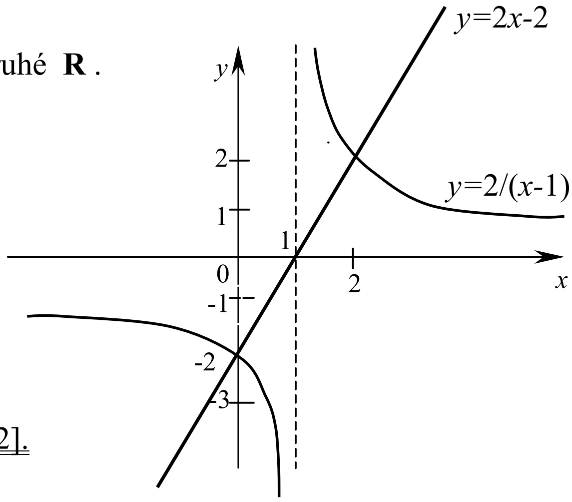
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
FP TU v Liberci

ZADÁNÍ TESTU (5 příkladů po 20 bodech, tj. max = 100 b., čistý čas 60 min.)

1. Do jedné souřadnicové soustavy načrtněte grafy funkcí $y = \dfrac{2}{x-1}$, $y = 2x - 2$ a vypočtete souřadnice průsečíků grafů.
2. Vyřešte v **R** nerovnici $\dfrac{x-1}{2-x} \le 1$.
3. Vyřešte rovnici s neznámou $x \in \boldsymbol{N}$: $\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{5x-2}}$.
4. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází středem elipsy $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$ a je kolmá na přímku q o rovnici $2x + y = 0$.
5. Najděte taková řešení rovnice $2\cos 2x - 4\cos x = 1$, která vyhovují podmínce $\sin x \ge 0$.

ŘEŠENÍ TESTU:

1. Do jedné souřadnicové soustavy načrtněte grafy funkcí $y = \dfrac{2}{x-1}$, $y = 2x - 2$ a vypočtete souřadnice průsečíků grafů.



Řešení: Definiční obor první funkce je **R** - {1}, druhé **R** .
Výpočet průsečíků:

$$\frac{2}{x-1} = 2x - 2,$$

$$2 = 2x^2 - 4x + 2,$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2,$$

tudíž $y_1 = y(0) = -2$, $y_2 = y(2) = 2$.

Grafy funkcí mají průsečíky $P_1 = [0, -2]$ a $P_2 = [2, 2]$.

2. Vyřešte v **R** nerovnici $\dfrac{x-1}{2-x} \le 1$.

Řešení: Nerovnici anulujeme (nelze násobit výrazem $2 - x$, neboť výraz $2 - x$ může být záporný).

$$\frac{x-1}{2-x} - 1 \le 0$$

Převedeme na podílový tvar; musí být $2 - x \ne 0$ a upravíme.

$$\frac{x-1-2+x}{2-x} \le 0$$

$$\frac{2x-3}{2-x} \le 0$$

$$\left[(2x-3) \le 0 \wedge (2-x) > 0\right] \vee \left[(2x-3) \ge 0 \wedge (2-x) < 0\right]$$

a) $(2x-3) \le 0 \Rightarrow x \le 3/2$, $(2-x) > 0 \Rightarrow x < 2$ … $P_1 = (-\infty; 3/2\rangle$

b) $(2x-3) \ge 0 \Rightarrow x \ge 3/2$, $(2-x) < 0 \Rightarrow x > 2$ … $P_2 = (2; \infty)$

Výsledek: $P = P_1 \cup P_2 = (-\infty; 3/2\rangle \cup (2; +\infty)$

***Poznámka*:**
*Řešení nerovnice lze zjednodušit užitím uzlových bodů a rozdělením oboru **R** na příslušné intervaly. Poté určíme znaménka dílčích výrazů v jednotlivých intervalech a z nich znaménka podílu.*
Nulové body jsou 3/2; 2, tedy intervaly jsou: $(-\infty; 3/2\rangle$, $\langle 3/2; 2)$, $(2; \infty)$.

Znaménka výrazů:

	$(-\infty; 3/2\rangle$	$\langle 3/2; 2)$	$(2; \infty)$
$2x-3$	-	+	+
$2-x$	+	+	-
podíl	-	+	-

Řešení:
$P = (-\infty; 3/2\rangle \cup (2; +\infty)$

3. Řešte rovnici s neznámou $x \in \boldsymbol{N}$: $\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{5x-2}}$.

Řešení: Rovnici nejprve přepíšeme bez odmocnin, užíváme postupně základní pravidla pro počítání s mocninami.

$$27^{\frac{2x-1}{x}} = 9^{\frac{5x-2}{2}}$$

$$\left(3^3\right)^{\frac{2x-1}{x}} = \left(3^2\right)^{\frac{5x-2}{2}}$$

$$3^{\frac{3(2x-1)}{x}} = 3^{\frac{2(5x-2)}{2}}$$

Protože základ mocnin na obou stranách rovnice je stejný, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{3(2x-1)}{x} = \frac{2(5x-2)}{2}$$

Za platnosti podmínky řešitelnosti $x \neq 0$ dále upravíme

$$6x - 3 = x \cdot (5x - 2)$$

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

Kvadratická rovnice má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 3/5$. Druhý kořen nesplňuje podmínku $x \in \boldsymbol{N}$. Pro kořen $x_1 = 1$ ověříme:

L: 27 $\qquad$ P: $\sqrt{9^{5-2}} = \sqrt{3^{2\cdot 3}} = 27$

Řešením rovnice je $\underline{\underline{x = 1}}$.

4. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází středem elipsy $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$ a je kolmá na přímku q o rovnici $2x + y = 0$.

Řešení: Rovnici elipsy upravíme na středový tvar $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

$$x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) = 0$$

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 3$$

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

Hledaná přímka p tedy bude procházet bodem S = [-1, 1].

Pro kolmé přímky se směrnicemi k_1, k_2 platí vztah $k_1 \cdot k_2 = -1$. Směrnice přímky q je $k_1 = -2$, tedy $-2\, k_2 = -1$ a směrnice přímky p je $k_2 = 1/2$.

Rovnice přímky procházející bodem $[x_0, y_0]$ a směrnicí k má tvar $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, tedy rovnice přímky p má tvar $y - 1 = (1/2)\,(x + 1)$.

Obecný tvar rovnice přímky je Ax + By + C = 0, na který rovnici přímky p upravíme.

Obecná rovnice přímky je tedy $\underline{\underline{x - 2y + 3 = 0}}$.

5. Najděte taková řešení rovnice $2\cos 2x - 4\cos x = 1$, která vyhovují podmínce $\sin x \geq 0$.

Řešení: Funkci dvojnásobného argumentu vyjádříme pomocí vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$$2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - 4\cos x = 1$$

a všechny výrazy převedeme na kosiny pomocí vztahu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$2\left(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right) - 4\cos x = 1$$
$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \ .$$

Substitucí $\cos x = t$ dostaneme kvadratickou rovnici $4t^2 - 4t - 3 = 0$ s kořeny

$$t = 3/2,\ t = -1/2 .$$

a) Rovnice $\cos x = 3/2$ nemá reálný kořen (funkce *kosinus* má hodnoty pouze v intervalu $\langle -1; 1 \rangle$).

b) Rovnici $\cos x = -1/2$ řešíme tak, že nejprve najdeme řešení rovnice $\cos\widetilde{x} = 1/2$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$; tj. $\widetilde{x} = \pi/3$. Hodnoty kosinu jsou záporné ve 2. a 3. kvadrantu, tedy

$$-\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\left(-\cos(\pi - \frac{\pi}{3})\right) = -\left(-\cos(\pi + \frac{\pi}{3})\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$$

Hodnoty $x_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ a $x_2 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, pro $k \in \boldsymbol{Z}$ řeší zadanou rovnici, avšak kořen x_2 nesplňuje zadanou počáteční podmínku $\sin x \geq 0$ (x_2 je z 3. kvadrantu). Řešením úlohy jsou tedy všechna

$$\underline{\underline{x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\ .}}$$

A na závěr pár rad pro psaní testu: *Prohlédněte si zběžně všechny příklady a začněte od „nejlehčích“ (které umíte). Zadání si přečtěte pozorně, uvědomte si, co má být výsledkem. Každému příkladu věnujte nejvýš 10 minut. Při zápisu řešení postupujte zleva doprava a shora dolů. Postup je vhodné (vpravo či průběžně) stručně komentovat. Před formulací odpovědi si znovu ověřte, zda jste dospěli k požadovanému výsledku.*

Literatura:

Učebnice středoškolské matematiky (zejména pro gymnázia).
Kaňka, M. - Coufal, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na vysoké školy*. Praha, Fortuna 1998.
Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ.* Dotisk 1. vydání. Praha, Prometheus 1998.
Bušek, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Přeprac. vyd. Praha, SPN 1999.
Bušek, I.: *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách*. 2. vyd. Praha, SPN 1995.
Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Praha, Victoria Publishing 1993.
Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha, SPN 1991 - či další vydání