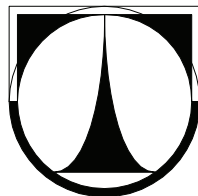


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií



Disertační práce

ve studijním oboru
Přírodovědné inženýrství

Ing. Lenka Kretschmerová

Vybrané nelineární vlastnosti piezoelektrických křemenných rezonátorů

Školitel: Prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

Datum státní doktorské zkoušky: 10.12.2003

Datum odevzdání práce: 15.6.2009

Chtěla bych upřímně poděkovat všem, kteří mi svou radou, pomocí, konzultací či podporou pomohli při tvorbě a realizaci této disertační práce a bez jejichž přispění by tato práce nikdy nevznikla. Především bych ráda poděkovala svému školiteli prof. Jaroslavu Noskovi a prof. Jiřímu Zelenkovi za neúnavné vedení a cenné zkušenosti, které mi během tvorby této práce předávali a svým kolegům z LCEP ENSMM Besancon, France za cenné rady a možnost využití jejich laboratoře pro měření napěťových závislostí změny rezonančního kmitočtu.

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Adresa pracoviště: Technická univerzita v Liberci
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Ústav řízení systémů a spolehlivosti
Studentská 2
461 17 Liberec
Česká republika

© Lenka Kretschmerová, 2009

ISBN 978-80-7372-485-6

Obsah

Anotace	4
Abstract	5
1 Úvod - shrnutí výzkumu v oboru disertace	6
2 Vlastnosti piezoelektrických látek	8
2.1 Lineární piezoelektrické stavové rovnice	8
2.2 Nelineární elektroelastické rovnice	8
3 Změny rezonančního kmitočtu	10
3.1 Změna f vlivem teploty	10
3.2 Určení nelineárního koeficientu γ	18
3.3 Metody pro určení nelineárního koeficientu γ	22
Závěr	34

Anotace

Hlavním cílem disertační práce je rozšíření poznatků o nelineárních vlastnostech piezoelektrických rezonátorů, především Y -řezů, které jsou vázány na elastické vlastnosti piezoelektrického materiálu.

V práci jsou uvedeny přehledy možností měření jednotlivých parametrů charakterizujících piezoelektrický rezonátor v náhradním elektrickém obvodu a je zde diskutována nejistota těchto měření.

Práce se bude věnovat určení teplotní závislosti piezoelektrické rezonanční frekvence a dále teorii určení nelineárního koeficientu γ , pro jehož velikost byla použita rovnice odvozená Tierstenem. Jednotlivé elastické moduly, které jsou v této rovnici obsazeny, budou také podrobeny podrobné analýze.

Poznatek o efektivní hodnotě elastického modulu čtvrtého řádu vedl k sestavení nové rovnice, která pro Y -řezy v budoucnu umožní určit hodnoty několika prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Tyto hodnoty základní matice pak umožní určit efektivní hodnotu elastického modulu čtvrtého řádu pro libovolný úhel Y -řezu křemenného rezonátoru.

Tato práce by měla přispět k určení nejvhodnějších metod pro určení efektivních hodnot elastických modulů čtvrtého řádu, kdy budou postupně sledovány dvě metody, které se pro některé řezy již dnes běžně používají a budou studovány i negativní vlivy, které tato měření ovlivňují.

Klíčová slova

piezoelektrické rezonátory, elastické moduly, tenzor, nelineární koeficient γ , teplotní závislost rezonančního kmitočtu, intermodulační jev, amplitudo-frekvenční efekt

Abstract

The main aim of the dissertation is the extension of the knowledge about piezoelectric resonators non-linear properties, primarily about Y -slices, which are bound to elastic properties of piezoelectric materials.

The dissertation surveys the possibilities of measurement of the individual parameters characterizing piezoelectric resonator in the equivalent electric circuit and the measurement uncertainty is discussed.

The dissertation deals with the determination of the piezoelectric resonant frequency temperature dependence together with the theory of the nonlinear γ coefficient determination. The value of γ coefficient was computed according to the equation derived by Tiersten. Individual elastic models, which are used in this equation, are submitted to a detailed analysis.

The findings concerning the effective value of the fourth degree elastic electric module led to the compilation of a new electric equation, which will enable the determination of the four degree elastic module basic matrix elements values for the Y -slices in the future. The values of basic matrix then enable the effective value determination of the four degree elastic module for an arbitrary angle of the quartz resonator Y -slice.

The dissertation should contribute to the determination of the optimal methods for the four degree elastic modules effective values determination. Two methods which are commonly used for some slices at present are successively analyzed, and the negative factors which influence these measurements are studied.

Key words

Piezoelectric resonators, elastic modules, tensor, γ nonlinear coefficient, resonance frequency temperature coefficient, inter-modulation phenomenon, amplitude- frequency effect.

1 Úvod - shrnutí výzkumu v oboru disertace

První práce týkající se piezoelektrických rezonátorů byla publikována v roce 1922 [1]. V ní bylo poprvé ukázáno použití piezoelektrického rezonátoru pro frekvenčně stabilní oscilátor. Dále bylo poukázáno na změny rezonančního kmitočtu oscilátorů vlivem teploty, vibrací a dalších vlivů. Tím byl dán impuls vědě pro další výzkum piezoelektrických vlastností látek. V roce 1926 byl zveřejněn výsledek výzkumu, kde byla popsána interference signálu jako důsledek okamžitého rozdílu dvou frekvencí. Tím byla vyzdvižena nutnost konstantní frekvence signálů v průběhu modulačního cyklu přijímačů. Prvotním zájmem všech uživatelů, kteří zařízení s piezoelektrickými členy používali, se tak stala frekvenční stabilita oscilátorů. Nejvýznamnějším faktorem, který byl zkoumán byla teplotní závislost, protože při provozu elektronických zařízení s piezoelektrickými oscilátory dochází vždy k jejich ohřevu.

Lineární teorie popisující základní chování piezoelektrických látek by měla být použita pro piezoelektrické pevné látky, které nejsou vystaveny žádnému elastickému předpětí nebo silnému elektrickému poli [2], [3]. Pokud tyto podmínky nejsou splněny, výsledky teoretických výpočtů musí být upraveny pomocí korekčních faktorů, nebo musí obsahovat některé nelineární vztahy odvozené z příslušných vstupních podmínek.

Tento efekt byl přesně popsán prostřednictvím nelineárních elektro-elastických diferenciálních rovnic uvedených např. v [4] a [2]. Nelineární teorie bere v úvahu konečnou deformaci η_{ij} a vyšší řády elastických, dielektrických, piezoelektrických a pyroelektrických koeficientů, které mohou být odvozeny z termodynamických potenciálů. Podle [2] a [5] může být pro stadium nelineárních elektro-elastických vlastností piezoelektrických látek použito termodynamické napětí t_{LM} , termodynamické elektrické posunutí D_N a termodynamická intenzita elektrického pole E_N . Předchozí výzkumy nelineárních elektro-elastických vlivů byly předvedeny na křemenných rezonátorech vibrujících v tloušťkově střižném módu. Výsledný efekt byl popsán způsobem změny elastických módů nebo koeficientů způsobených elektrickým polem. Vliv elektrického pole na velikost elastických konstant nebo modulů byl popsán použitím nelineárních elektro-elastických diferenciálních rovnic v [6] a [7]. Použití stanovených termodynamických materiálových konstant pro konkrétní módy rezonátorů bylo zaznamenáno v [8]. Důležité úpravy popisu nelineárního jevu byly zaznamenány v [9]. Předpokládáme-li působení malého pole v piezoelektrických látkách, pak současný významný matematický příspěvek k popisu třídimensionálních rovnic nezatížené piezoelektrické látky využívá předpokládané výsledky presentované v [10] a [2].

Přesných výsledků třídimensionálního problému bylo dosaženo v [11] pouze za předpokladu nekonečné desky a prostorových proměnných. Příspěvky řešící piezoelektrické desky v limitovaných rozměrech jsou relativně neobvyklé. Nedávno byl presentován příspěvek [12] popisující přesné analýzy ohraničených piezoelektrických látek.

Kromě nelineárních efektů piezoelektrických látek je zde druhý řád vlivů jako jsou rezonátory se zachycenou energií. Tento vliv by měl být zvažován při zkoumání nebo tvorbě pie-

piezoelektrických zařízení. Různorodost zachycené energie elastických vlnových jevů a vibrací a jejich aplikace na různá piezoelektrická zařízení jako jsou pásové rezonátory, monolitické filtry, piezoelektrické přenašeče, vibrační gyroskopy a SAW zařízení jsou popsány v [13]. Teoretické zacházení s efektem zachycené energie bylo pro tloušťkové střižné křemenné rezonátory popsáno a ukázáno v [26]. Nelineární vlastnosti tloušťkové střižných kmitů křemenných rezonátorů byly studovány v [14], [15], [28] a [16].

V poslední době byla věnována velká pozornost piezoelektrickým krystalům s velkým koeficientem elektromechanické vazby. Představiteli této skupiny krystalů jsou především křemenné homeotypy krystalů jako je berlinit, langasit či langatit a dále také $GaPO_4$. Průměrně dvojnásobná velikosti koeficientu elektromechanické vazby k_{26} spojená s rezonátory kmitajícími tloušťkově střižnými módy kmitů dovolují rozšířit vzdálenosti mezi sériovým a paralelním rezonančním kmitočtem. Takovéto typy rezonátorů jsou vhodné pro frekvenční rozsah od 1 do $100MHz$. Velikost koeficientu elektromechanické vazby také zvyšuje rozdíl teplotní závislosti rezonanční frekvence pro základní a harmonické rezonanční frekvence rezonátorů kmitající tloušťkově střižnými módy kmitů. Protože krystaly $GaPO_4$ mají stejnou symetrii jako křemen (SiO_2), rezonátory vyrobené z tohoto materiálu s rotací Y-řezů kmitající tloušťkově střižnými módy kmitů mohou být studovány stejnými metodami jako obdobné rezonátory z křemene. Toto je důležitá výhoda piezoelektrického jednoduchého krystalu. Experimentální studie ukazují že nelineární efekty jako jsou intermodulace nebo amplitudo-frekvenční efekt mohou být použity pro zjištění materiálových konstant vyšších řádů i pro krystaly vyrobené z $GaPO_4$.

Tato práce se věnuje popisu vlivu vybraných parametrů okolního prostředí na rezonanční kmitočet křemenných destiček rezonátorů a možnosti využití těchto vlivů k dalšímu popisu materiálových vlastností piezoelektrických látek

2 Vlastnosti piezoelektrických látek

Vlivem mechanického napětí nebo deformace vzniká v krystalu elektrická polarizace. Tento jev se nazývá piezoelektrický efekt. Inverzní piezoelektrický efekt se projevuje mechanickou deformací vyvolanou přiloženým elektrickým polem. Piezoelektrický jev se nevyskytuje ve strukturách se středem souměrnosti proto, že polarizace je charakterizovaná vektorem, který není středově souměrný. Dále se tento efekt nevyskytuje u látek s vysokou souměrností kubické soustavy jak je ukázáno v [2].

2.1 Lineární piezoelektrické stavové rovnice

K souhrnnému popisu elastických, piezoelektrických a dielektrických vlastností piezoelektrických látek lze při zanedbání tepelných jevů zvolit jednu dvojici ze čtyř nezávislých proměnných T_λ , S_λ , E_i , D_i a zbývající dvě proměnné vyjádřit pomocí piezoelektrických stavových rovnic

$$\begin{aligned}
 T_\lambda &= \sum_\mu c_{\lambda\mu}^E S_\mu + \sum_i e_{i\lambda} E_i ; & T_\lambda &= \sum_\mu c_{\lambda\mu}^D S_\mu + \sum_i h_{i\lambda} D_i ; \\
 S_\lambda &= \sum_\mu s_{\lambda\mu}^E T_\mu + \sum_i d_{i\lambda} E_i ; & S_\lambda &= \sum_\mu c_{\lambda\mu}^D T_\mu + \sum_i g_{i\lambda} D_i ; \\
 D_i &= \sum_\mu e_{i\mu} S_\mu + \sum_j \epsilon_{ij}^S E_j ; & D_i &= \sum_\mu d_{i\mu} T_\mu + \sum_j \epsilon_{ij}^T E_j ; \\
 E_i &= - \sum_\mu h_{i\mu} S_\mu + \sum_j \beta_{ij}^S D_j ; & E_i &= - \sum_\mu g_{i\mu} T_\mu + \sum_j \beta_{ij}^T D_j .
 \end{aligned} \tag{1}$$

kde $c_{\lambda\mu}$, $s_{\lambda\mu}$, $e_{i\lambda}$, $d_{i\lambda}$, $h_{i\lambda}$, $g_{i\mu}$, β_{ij} a ϵ_{ij} jsou složky tenzorů materiálových vlastností piezoelektrických látek.

2.2 Nelineární elektroelastické rovnice

Lineární teorie piezoelektřiny uvažovaná v předchozích částech je vhodná pro popis šíření akustických vln s malou amplitudou a pro řešení kmitů s malou amplitudou těles, na která nepůsobí elastické předpětí nebo která nejsou vystavena působení silného elektrického pole. Pokud není tento předpoklad splněn, je nutno výsledky výpočtu korigovat zavedením různých korekčních faktorů nebo při výpočtu vycházet z nelineární teorie, která musí být přizpůsobena počátečním podmínkám.

Při popisu lineární teorie bylo předpokládáno, že elastické deformace jsou velmi malé a byl pro ně zaveden symbol S_{ij} . Při formulaci nelineární teorie použijeme konečnou deformaci, kterou označíme η_{ij} . Elastické moduly definované vztahem (2) nazýváme elastickými moduly n -tého řádu, kde $n \geq 2$.

$$c_{ijkl\dots pq} = \left(\frac{\partial^n U}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl} \dots \partial \eta_{pq}} \right)_{D, \sigma = konst} \quad (2)$$

Nelineární elektroelastické rovnice byly odvozeny v [17]. Pro popis elastických a elektrických vlastností využil jednak celkového Piolova - Kirchhoffova tenzoru elastických napětí K_{Lj} daného součtem elastických napětí F_{Lj} a Maxwellova - Piolova - Kirchhoffova tenzoru M_{Lj}

$$K_{Lj} = F_{Lj} + M_{Lj}$$

a také vektoru elektrického posunutí D_L

$$D_L = \epsilon_0 E_L + P_L,$$

kde velká písmena v indexech uvedených vztahů odpovídají prostorovým souřadnicím, malá písmena materiálovým souřadnicím.

Pro veličiny F_{Lj} , M_{Lj} , E_L a P_L byly odvozeny vztahy uvedené např. v [17], [2].

Při sledování malých piezoelektrických vazeb v křemenu jsme přidali pouze nelineární elastické podmínky. Elektrické a elektroelastické podmínky bereme jako lineární. Druhá skupina nelineárních problémů ukazuje na prezentaci malého amplitudového vlnění ve středu předpětí. Teoretická analýza je zjednodušena skutečností, že vlnění nemá vliv na statickou deformaci. Obvykle se zabýváme pouze změnou charakteristiky vlnění v důsledku předpětí.

3 Změny rezonančního kmitočtu

Je obecně známo, že lineární teorie piezoelektrického jevu se používá pro popis šíření akustických vln v pevných piezoelektrických materiálech a pro řešení pohybových rovnic, pokud jsou amplitudy kmitů malé. Uvažované kmity pevných látek nesmí být zároveň vystaveny žádnému elastickému předpětí nebo silnému elektrickému poli. Pokud tyto požadavky nejsou splněny, musí být výsledky výpočtů upraveny pomocí různých korekčních faktorů nebo tyto výpočty musí obsahovat některé nelineární popisy zadávané pomocí jednotlivých vstupních podmínek. Vlastnosti akustického vlnění rezonátoru jsou vždy ovlivněny vnitřními a vnějšími parametry, které způsobují nelineární vlastnosti krystalu. Tyto nelinearity můžeme nalézt na počátku nelineárních jevů, jako jsou frekvenčně-amplitudový efekt, intermodulace a citlivost na různé fyzikální jevy jako např. elektrické pole, teplota, mechanické síly, zrychlení nebo tlak [18] a [19]. Je zřejmé, že řada těchto nelineárních jevů není žádoucí a naopak, nelinearity mohou být využity pro funkci snímačů [20], které pracují na bázi BAW a SAW rezonátorů. Vlastní rezonanční frekvence určitého druhu kmitu piezoelektrického výbrusu je obecně funkcí rozměrů výbrusu, hustoty materiálu a elastických konstant piezoelektrického materiálu, ze kterého je rezonátor vyroben. Každá z těchto veličin je však závislá na externích vlivech jako je teplota, budicí napětí, materiál elektrod, jejich tloušťka atd. V následujících statích se budeme některým těmito okolním vlivům věnovat podrobněji.

Vlastní práce se zabývá elastickými nelinearitami křemene speciálně pro Y-řezy rezonátorů kmitajících tloušťkověstřížnými módy kmitů. Z celého spektra parametrů, které na rezonátor působí, se dále budeme věnovat teplotnímu vlivu za změnu rezonančního kmitočtu a určení nelineárního koeficientu γ pomocí dvou metod měření, které byly popsány v [15], [17], a možnosti stanovení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu \tilde{c}_{6666} pro měřené Y-řezy křemene.

3.1 Změna f vlivem teploty

Závislost změny rezonanční frekvence vlivem teploty je nejčastěji charakterizována tzv. teplotním koeficientem frekvence α_f a definována vztahem

$$\alpha_f = \frac{1}{f} \frac{\Delta f}{\Delta T} \quad (3)$$

kde Δf značí změnu rezonanční frekvence f piezoelektrického výbrusu způsobenou změnou teploty. Pro teplotní koeficient frekvence α_f se také používá označení Tk_f a obdobně se značí i teplotní koeficienty elastických a piezoelektrických konstant a modulů.

Obecně je závislost vlastní rezonanční frekvence na teplotě funkcí třetího řádu a má tvar

$$f = f_0(1 + \alpha_f^{(1)}\Theta + \alpha_f^{(2)}\Theta^2 + \alpha_f^{(3)}\Theta^3 + \dots) \quad (4)$$

kde $\Theta = T - T_0$, f je výsledná frekvence piezoelektrického výbrusu při teplotě T , f_0 je frekvence při teplotě T_0 . K této teplotě se také vztahují koeficienty $\alpha_f^{(1)}$, $\alpha_f^{(2)}$ a $\alpha_f^{(3)}$.

Dále se budeme věnovat teoretickému stanovení teplotního koeficientu pro AT-řez křemenného rezonátoru a tyto výsledky budou porovnány s experimentálně naměřenou teplotní závislostí reálného piezoelektrického rezonátoru, ze které pak budou stanoveny experimentální hodnoty teplotních koeficientů.

Výpočet Tk_f pro AT-řez křemenného rezonátoru

AT-řez je definován jako XY-řez, kde $\Psi = -32,25^\circ$. Uvažujeme tenkou destičku křemene se středem v ortogonálním systému os x_1 , x_2 a x_3 , kde osa x_1 je totožná s elektrickou osou (X -osou) křemene. Tloušťka a šířka destičky je $2b$ a $2a$. Na povrchu destičky, kde hodnota $x_2 = \pm b$, je nanášena elektroda. Hustota a tloušťka elektrody je ρ' a $2b'$. Vnější strana elektrod a okraje destičky, kde $x_1 = \pm a$, nejsou zatíženy napětím. Proto stejně jako bylo ukázáno v [21] můžeme pro další výpočet uvažovat pouze takové módy vibrací, které jsou antisymetrické k osám x_1 a x_2 a nezávislé na ose x_3 .

Pokud budeme aplikovat teorii popsanou v [19], na dvourozměrnou pohybovou rovnici odvozenou v [22], použijeme-li pouze výše uvedené módy vibrací a pokud i zanedbáme piezoelektrické vlastnosti rezonátoru, pak se dá soustava pohybových rovnic křemenné destičky bez elektrod zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \beta_{22}t_{21,1}^{(0)} + \beta_{23}t_{31,1}^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{22}F_2^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{23}F_3^{(0)} &= 2\rho\ddot{u}_2^{(0)}, \\ \beta_{32}t_{21,1}^{(0)} + \beta_{33}t_{31,1}^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{32}F_2^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{33}F_3^{(0)} &= 2\rho\ddot{u}_3^{(0)}, \\ \beta_{11}t_{11,1}^{(1)} - \frac{\pi}{2b}\beta_{11}\bar{t}_{21}^{(1)} + \frac{1}{b}\beta_{11}F_1^{(1)} &= \rho\ddot{u}_1^{(1)}, \\ \beta_{22}t_{21,1}^{(2)} + \beta_{23}t_{31,1}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{22}\bar{t}_{22}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{23}\bar{t}_{23}^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{22}F_2^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{23}F_3^{(2)} &= \rho\ddot{u}_2^{(2)}, \\ \beta_{32}t_{21,1}^{(2)} + \beta_{33}t_{31,1}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{32}\bar{t}_{22}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{33}\bar{t}_{32}^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{32}F_2^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{33}F_3^{(2)} &= \rho\ddot{u}_3^{(2)}, \\ \beta_{11}t_{11,1}^{(3)} - \frac{3\pi}{2b}\beta_{11}\bar{t}_{21}^{(3)} + \frac{1}{b}\beta_{11}F_1^{(3)} &= \rho\ddot{u}_1^{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

kde $F_1^{(n)}$ je n -tý řád povrchového napětí a určí se z rovnice

$$F_i^{(n)} = t_{i2}(b) - (-1)^n t_{i2}(-b), \quad (6)$$

kde $t_{ij}^{(n)}$ a $\bar{t}_{ij}^{(n)}$ jsou přírůstky napětí získané ze vztahů popisujících vztah napětí, posunutí a teploty

$$t_{12}^{(0)} = 2[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)}) + \frac{1}{b}D_{66}\beta_{11}(k_1u_1^{(1)} + u_1^{(3)})],$$

$$t_{13}^{(0)} = 2[D_{55}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{56}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)}) + \frac{1}{b}D_{56}\beta_{11}(k_1u_1^{(1)} + u_1^{(3)})],$$

$$t_{11}^{(1)} = k_2D_{11}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} + \frac{8}{3b}[D_{12}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{14}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})],$$

$$t_{12}^{(2)} = D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)}) - \frac{2}{3b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(1)} + \frac{18}{5b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(3)},$$

$$t_{13}^{(2)} = D_{55}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{56}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)}) - \frac{2}{3b}D_{56}\beta_{11}u_1^{(1)} + \frac{18}{5b}D_{56}\beta_{11}u_1^{(3)},$$

$$t_{11}^{(3)} = D_{11}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)} - \frac{8}{5b}[D_{12}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{14}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})],$$

$$\bar{t}_{12}^{(1)} = \frac{\pi}{2b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(1)} + \frac{4k_1}{\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)})] - \frac{4}{3\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)})],$$

$$\bar{t}_{22}^{(2)} = \frac{\pi}{b}[D_{22}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{24}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})] + \frac{8}{3\pi}D_{12}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} - \frac{8}{5\pi}D_{12}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)},$$

$$\bar{t}_{23}^{(2)} = \frac{\pi}{b}[D_{24}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{44}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})] + \frac{8}{3\pi}D_{14}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} - \frac{8}{5\pi}D_{14}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)},$$

$$\bar{t}_{12}^{(3)} = \frac{3\pi}{2b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(3)} + \frac{4}{3\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)})] - \frac{12}{5\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)})]. \quad (7)$$

β_{ij} je získáno ze vztahu

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}^{\Theta},$$

$$\alpha_{ij}^{\Theta} = \alpha_{ij}^{(1)}\Theta + \alpha_{ij}^{(2)}\Theta^2 + \alpha_{ij}^{(3)}\Theta^3, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (8)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, $\alpha_{ij}^{(n)}$ je n -tý řád teplotně-roztažného koeficientu a Θ je teplotní přírůstek vztažený k nominální teplotě T_o určený ze vztahu $\Theta = T - T_o$.

Elastické moduly D_{ab} a β_{ij} jsou závislé na teplotním přírůstku podle vztahů

$$\begin{aligned} D_{ab} &= C_{ab} + D_{ab}^{(1)}\Theta + D_{ab}^{(2)}\Theta^2 + D_{ab}^{(3)}\Theta^3, \quad (a, b = 1, 2, \dots, 6), \\ \beta_{ij} &= \delta_{ij} + \alpha_{ij}^{(1)}\Theta + \alpha_{ij}^{(2)}\Theta^2 + \alpha_{ij}^{(3)}\Theta^3, \end{aligned} \quad (9)$$

kde C_{ab} je elastický modul při nominální teplotě T_o a hodnoty $D_{ab}^{(n)}$ jsou podrobněji popsány v [19].

Vzhledem k mechanickému efektu pokovení destičky rezonátoru můžeme rovnici (6) nahradit vztahem

$$\begin{aligned} F_k^{(m)} &= \Phi_k^{(m)} - 2Rb\rho\ddot{u}_k^{(m)} \quad (k = 2, 3; \quad m = 0, 2), \\ F_1^{(q)} &= \Phi_1^{(q)} + 4b'D_{11}^{\Theta}\beta'_{11}u_{1,11}^{(q)} - 2Rb\rho\ddot{u}_1^{(q)} \quad (p = 1, 3). \end{aligned} \quad (10)$$

Protože povrchové napětí pro vnější stranu elektrody je rovno nule, můžeme psát

$$\Phi_i^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, 2, 3). \quad (11)$$

V rovnici (10) je hmotnostní zatížení R získáno ze vztahu

$$R = \frac{2\rho'b'}{\rho b}, \quad (12)$$

kde b' je poloviční tloušťka elektrody na jedné straně destičky a ρ' je hustota elektrody.

$D'_{11}{}^\Theta$ a β'_{11} jsou závislé na teplotním přírůstku Θ podle vztahů

$$D'_{11}{}^\Theta = D'_{11} + D'_{11}{}^{(1)}\Theta,$$

$$\beta'_{11} = 1 + \alpha'_{11}{}^{(1)}\Theta, \quad (13)$$

kde D'_{11} je elastický modul roviny elektrody při nominální teplotě T_o , $D'_{11}{}^{(1)}$ je první řád teplotní derivace elastického modulu elektrody a $\alpha'_{11}{}^{(1)}$ je první řád koeficientu teplotní roztažnosti elektrody.

Použitých šest složek přírůstku posunutí $u_i^{(n)}(x_i, t)$ je v souřadném systému funkcí souřadnice x_1 a času.

$$u_i^{(n)}(x_i, t) = u_i^{(n)} e^{j\omega t}, \quad (14)$$

kde $u_i^{(n)}$ jsou již pouze funkcí souřadnice x_1 a

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} &= A_2^{(0)} \sin \xi x_1, & u_3^{(0)} &= A_3^{(0)} \sin \xi x_1, & u_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \cos \xi x_1, \\ u_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin \xi x_1, & u_3^{(2)} &= A_3^{(2)} \sin \xi x_1, & u_1^{(3)} &= A_1^{(3)} \cos \xi x_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Dosažením soustavy rovnic (15) do rovnic (7) spolu s výsledky z rovnic (5) dostaneme soubor šesti homogenních lineárních algebraických rovnic se šesti amplitudami $A_i^{(n)}$ definovanými v rovnicích (15).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2^{(0)} \\ A_3^{(0)} \\ A_1^{(1)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ A_1^{(3)} \end{bmatrix} = 0, \quad (16)$$

kde hodnoty parametrů a_{mn} , $m, n = 1..6$ jsou určeny v [27].

Pokud položíme determinant matice koeficientů $A_j^{(n)}$ z rovnice (16) roven nule

$$\left| a_{ij} \right| = 0 \quad (17)$$

dostaneme rozptyl poměru Ω vs z .

Pro všechny kořeny z rovnice(17) je pět poměrů amplitud

$$\frac{A_2^{(0)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{1n}, \quad \frac{A_3^{(0)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{2n}, \quad \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{3n}, \quad \frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{4n}, \quad \frac{A_1^{(3)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{5n} \quad (18)$$

možno vyjádřit pěti ze šesti rovnic (16).

Použité okrajové podmínky

a) Nulové napětí na povrchu pro $x_2 = \pm(b + 2b')$

$$p_k^{(m)} = \beta_{22}t_{12}^{(m)} + \beta_{23}t_{13}^{(m)} = 0 \quad (k = 2, 3; \quad m = 0, 2). \quad (19)$$

b) Nulové napětí na hranách pro $x_2 = \pm a$

$$p_1^{(q)} = \beta_{11}t_{11}^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 3). \quad (20)$$

S šesti koeficienty z_n z rovnice (16) a třiceti koeficienty α_{qn} určenými z rovnice (18) můžeme nyní psát

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{1n} \sin \xi x_1, & u_3^{(0)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{2n} \sin \xi x_1, \\ u_1^{(1)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \cos \xi x_1, & u_2^{(2)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{3n} \sin \xi x_1, \\ u_3^{(2)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{4n} \sin \xi x_1, & u_1^{(3)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{5n} \cos \xi x_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Po dosazení rovnic (21) do rovnic (7) a použití okrajové podmínky určené v (20) dostaneme následující homogenní rovnici

$$\sum_{n=1}^6 A_n b_{mn} = 0, \quad (m = 1, \dots, 6), \quad (22)$$

kde hodnoty parametrů b_{mn} jsou určeny v [27].

Kořeny poměru a/b získáme, pokud položíme determinant koeficientů A_n v rovnici (22) roven nule

$$\left| b_{mn} \right| = 0 \quad (23)$$

a získáme tím výsledky pro sledování závislosti frekvenčního spektra Ω vs poměr a/b .

Vliv elektrické tuhosti desky

Analýza volných vibrací piezoelektrického rezonátoru kmitajícího tloušťkově-střížnými kmity se zkratovanými elektrodami ukázala, že vztah mezi základní a dalšími rezonančními frekvencemi není dán jednoduchými integrálními výrazy. Jejich vzájemný vztah závisí na faktoru elektromechanické vazby. Pro piezoelektrický rezonátor s malou hodnotou faktoru elektromechanické vazby a šířkou $2b$ můžeme určit rezonanční frekvenci základní a třetí harmonické tloušťkově-střížných kmitů z matematických popisů Tierstena [23]

$$f_n = \frac{n}{4b} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left(1 - \frac{4k_{26}^2}{n^2\pi^2}\right), \quad (24)$$

kde

$$\bar{c}_{66} = c_{66}(1 + \bar{k}_{26}^2), \quad \bar{k}_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{c_{66}\epsilon_{22}}.$$

Z rovnice (24) získáme

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} (1 + 0.095k_{26}^2), \\ f_3 &= \frac{3}{4b} \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} (1 + 0.455k_{26}^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Koeficienty $0.095k_{26}^2$ a $0.455k_{26}^2$ v rovnici (25) představují přírůstkové změny frekvenčně-teplotních charakteristik. Teplotní koeficient prvního řádu pro základní a třetí harmonickou rezonanční $\Delta T f_1^{(1)}$ a $\Delta T f_3^{(1)}$ je dán vztahem

$$\begin{aligned} \Delta T f_1^{(1)} &= 0.095k_{26}^2 (T k_{26}^2)^{(1)}, \\ \Delta T f_3^{(1)} &= 0.455k_{26}^2 (T k_{26}^2)^{(1)}, \end{aligned} \quad (26)$$

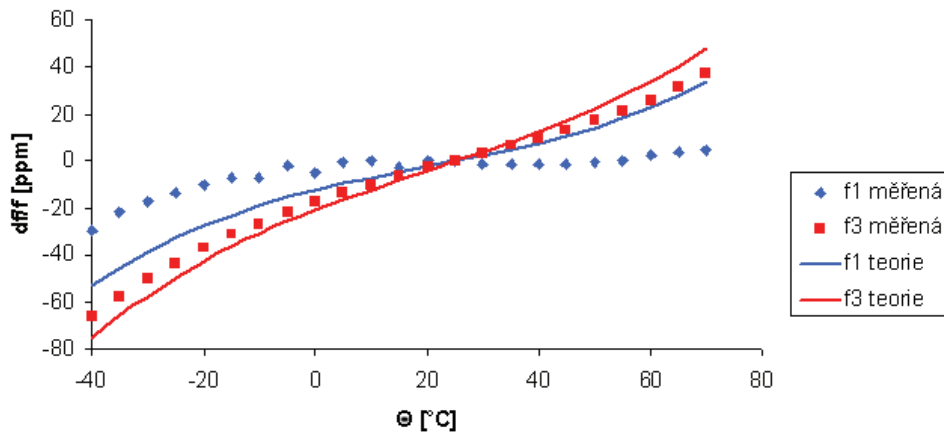
kde

$$(T k_{26}^2)^{(1)} = 2T e_{26}^{(1)} - T \epsilon_{22}^{(1)} - T c_{66}^{(1)}.$$

Pro AT-řez křemenné desky je $k_{26} = 0,08806$, $(T k_{26}^2)^{(1)} = 2,12 \cdot 10^{-4}$, $\Delta f_1^{(1)} = 1,64 \cdot 10^{-7}$ a $\Delta f_3^{(1)} = 7,47 \cdot 10^{-7}$. Vypočtené hodnoty teplotního koeficientu $(T k_{26}^2)^{(1)}$ odpovídají reálně naměřené teplotní závislosti AT-řezů křemenného piezoelektrického rezonátoru jsou uvedeny v tabulce 1 na straně 18.

Porovnání naměřené a vypočtené teplotní charakteristiky AT -řezu

Předchozí část byla věnována obecnému odvození teplotní závislosti Y -řezu křemenného výbrusu kmitajícího tloušťkově-střižnými kmity. Teplotní závislost Y -řezu libovolného výbrusu piezokeramického materiálu lze také stanovit experimentálně měřením změny rezonančního kmitočtu vlivem okolní teploty (např. v teplotní komoře).



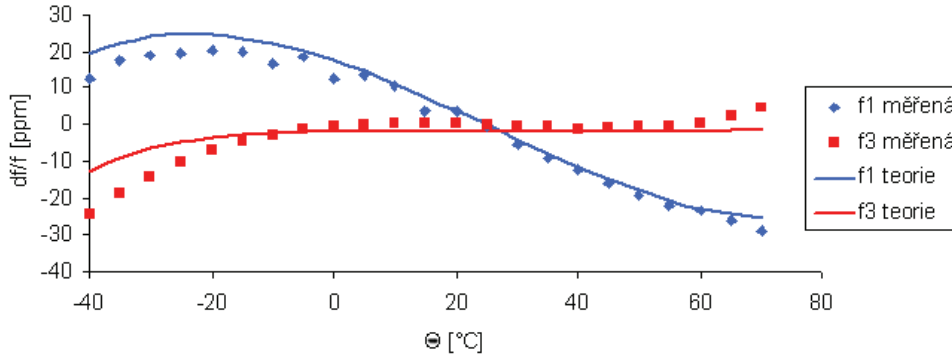
Obrázek 1: Teplotní charakteristiky AT -řezu ($-35^{\circ}13'$)

Pro porovnání měření a výpočtů byly vybrány dvě skupiny AT -řezů křemenných deskových piezoelektrických rezonátorů s orientacemi $-35^{\circ}13'$ a $-35^{\circ}21'$. Na povrch destiček o průměru 7,95 mm byly nanесeny stříbrné elektrody o průměru 4 mm a hmotnostním zatížením $R = 0.008$. Obě skupiny rezonátorů kmitají tloušťkově-střižnými typy kmitů na základní harmonické 10 MHz. Základní a třetí harmonická rezonanční frekvence byla u obou skupin rezonátorů měřena a počítána v rozsahu teplot od -35°C do $+70^{\circ}\text{C}$.

Z teoreticky získaných hodnot frekvenčně-teplotních koeficientů byly vypočteny frekvenčně-teplotní charakteristiky, které jsou společně s naměřenými frekvenčně - teplotními charakteristikami pro základní i třetí harmonickou rezonanční frekvenci pro řezy s orientací $-35^{\circ}13'$ zobrazeny na obr. 1. Na obr. 2 je typická naměřená a vypočtená frekvenčně-teplotní charakteristika pro základní i třetí harmonickou rezonanční frekvenci pro řezy s orientací $-35^{\circ}21'$.

Z naměřených hodnot frekvenčně-teplotních charakteristik byly vypočteny frekvenčně-teplotní koeficienty, které jsou pro obě skupiny piezoelektrických rezonátorů shrnuty v tabulce 1.

V tabulce 2 jsou zobrazeny frekvenčně-teplotní koeficienty vypočtené z rovnic (9), (13), (17), (22) a (23) s ohledem na (26).



Obrázek 2: Teplotní charakteristiky AT -řezu ($-35^{\circ}21'$)

Tabulka 1: Frekvenčně-teplotní koeficienty z naměřených charakteristik

Úhel orientace	n=1			n=3		
	$Tf^{(1)}$ [10^{-7}]	$Tf^{(2)}$ [10^{-9}]	$Tf^{(3)}$ [10^{-11}]	$Tf^{(1)}$ [10^{-7}]	$Tf^{(2)}$ [10^{-9}]	$Tf^{(3)}$ [10^{-11}]
$-35^{\circ}13'$	-0.259	-0.846	9.361	6.359	7.432	9.250
$-35^{\circ}21'$	-7.325	-1.487	0.717	-0.645	-0.680	9.379

Rozdíly mezi naměřenými a výpočtem určenými hodnotami jsou dány nejistotou naměřených veličin a také možnými příměsemi v materiálu, ze kterého jsou rezonátory vyrobeny. Teoretické výpočty jsou určeny pro křemen bez příměsí, čehož lze při výrobě umělého křemene dosáhnout jen velmi obtížně. Dalším důvodem nepřesností je tolerance výroby rezonátoru, tedy přesnost úhlu řezu a hmotnosti nanášených elektrod. Úhel řezu je dle výrobce rezonátorů určen s přesností $\pm 1'$.

3.2 Určení nelineárního koeficientu γ

Jak již bylo uvedeno v úvodu, existuje velké množství vlivů, které mají vliv na stabilitu rezonančního kmitočtu. Teplotní závislost rezonančního kmitočtu je z těchto vlivů sice většinou nejvýraznější, ale není jediným jevem, který má na stabilitu rezonančního kmitočtu vliv. Mezi takové jevy patří např. úroveň buzení (amplitudo-frekvenční vliv), okolní vibrace, hmotnostní zatížení elektrod (nejčastěji používané mikrováhy), intermodulační jev atd.

Z této velké skupiny jevů se dále budeme věnovat dalším nelineárním vlastnostem elastických vlastností křemene. Tyto nelinearity se nejčastěji sledují pomocí vlivu intermodulačního buzení rezonátoru nebo se sleduje vliv úrovně budícího signálu (tzv. amplitudově-

Tabulka 2: Frrekvenčně-teplotní koeficienty vypočtené teoreticky

Úhel orientace	n=1			n=3		
	$Tf^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tf^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tf^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]	$Tf^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tf^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tf^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]
-35°13'	4.633	1.547	10.847	7.917	1.251	10.834
-35°21'	-7.774	-0.203	10.953	0.091	0.394	11.168

frekvenční vliv) na změnu rezonanční frekvence. Tomuto tématu je pro Y -řezy věnována práce [17], kde je ukázán vliv nelineárních vlastní elastických modulů a z nich je odvozen základní vztah pro nelineární koeficient γ v následující podobě

$$\gamma = 1/2\tilde{c}_{22}^E + \tilde{c}_{266}^E + 1/6\tilde{c}_{6666}^E, \quad (27)$$

kde \tilde{c}_{22}^E , \tilde{c}_{266}^E a \tilde{c}_{6666}^E značí postupně efektivní elastické moduly druhého, třetího a čtvrtého řádu.

Nelineární koeficient γ je pro libovolný Y -řez podle rovnice (27) složen ze tří efektivních elastických modulů. Efektivní hodnoty \tilde{c}_{22}^E a \tilde{c}_{266}^E je tedy možno určit s pomocí tabulek, které obsahují hodnoty základních prvků matice elastického modulu druhého a třetího řádu, které je vypočíst podle vztahu

$$\tilde{A}_{i\dots p} = A_{a\dots h} \sum_{a\dots h} \alpha_{ia} \dots \alpha_{ph}, \quad (28)$$

kde $\tilde{A}_{i\dots p}$ je efektivní hodnota složky tenzoru, $A_{a\dots h}$ je složka základní matice tenzoru a $\alpha_{ia} \dots \alpha_{ph}$ jsou směrové kosiny úhlu natočení, které jsou pro natočení kolem jedné ortogonální osy X zobrazeny v tabulce 3.

Tabulka 3: Směrové kosiny pro Y -řezy křemenných výbrusů

Osa	x	y	z
x'	1	0	0
y'	0	cos Φ	- sin Φ
z'	0	sin Φ	cos Φ

Pro výpočet elastických modulů 2. a 3. řádu byly v jazyce Delphi vytvořeny jednoduché programy, které po zadání úhlu natočení pro Y -řezy křemenných piezoelektrických rezonátorů základní matice přepočítají na efektivní hodnoty. Výstupem není jen potřebná hodnota \tilde{c}_{22}^E a \tilde{c}_{266}^E , ale celá matice efektivních hodnot. Pro vlastní výpočet jsme použili zjednodušenou verzi programu, která nám určí jen žádanou hodnotu elastického modulu

druhého a třetího řádu.

Elastický modul čtvrtého řádu \tilde{c}_{6666}^E je v této rovnici neznámou, protože prvky základní matice elastického modulu 4.řádu ještě nikde nebyly publikovány. Pro určení koeficientu γ však existuje několik metod a je ho tedy možno měřením pro konkrétní řez určit. Ve své práci ho postupně určili jak Tiersten [17], tak i Nosek [15] pro AT -řez piezoelektrického rezonátoru. Popisu těchto metod měření a jejich další specifikaci se budeme věnovat dále.

Určení efektivní hodnoty \tilde{c}_{6666}

Úpravou rovnice (27) získáme

$$\tilde{c}_{6666}^E = 6\gamma - 3\tilde{c}_{22}^E - 9\tilde{c}_{266}^E. \quad (29)$$

Touto rovnicí je možno určit efektivní hodnotu změřeného Y -řezu piezoelektrického výbrusu. I když není známa základní matice elastických modulů čtvrtého řádu, lze podle rovnice (28) obecně určit, z kolika prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu je efektivní hodnota elastického modulu \tilde{c}_{6666}^E určena. Pro tento výpočet byl vytvořen program, který nám vypíše obecnou rovnici výpočtu tenzoru osmého řádu, kterým elastický modul čtvrtého řádu je. Rovnice je složena z nenulových násobků prvků základní tenzorové matice.

Program byl vytvořen v obecné poloze, tedy pro určení $c_{\lambda\mu\kappa\tau}^E$. Základním prvkem programu pro výpočet efektivní hodnoty prvku matice tenzoru 8. řádu je tato transformační matice

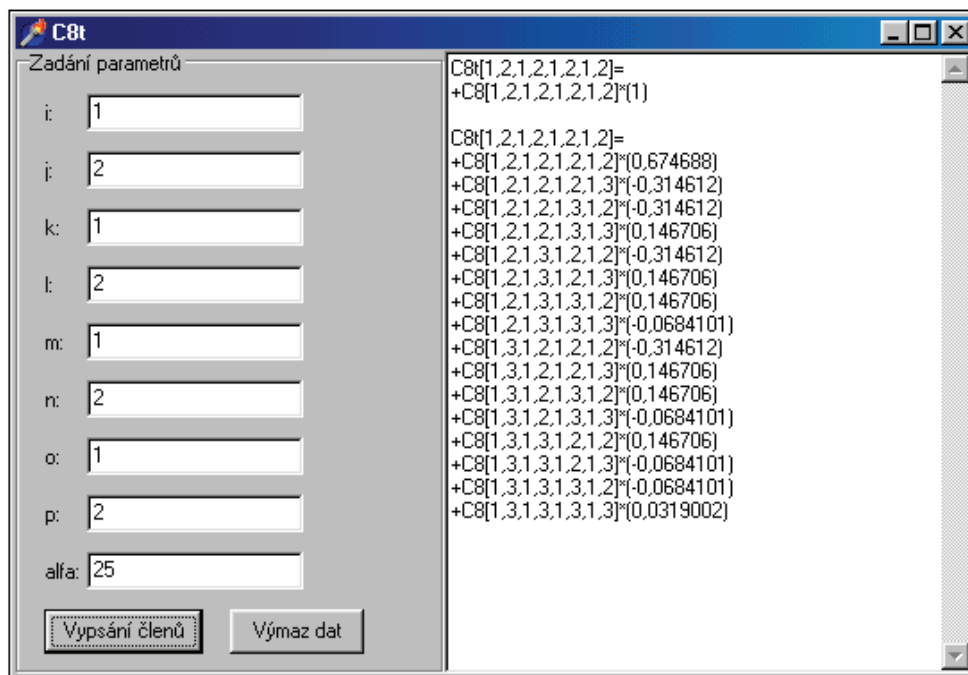
$$\tilde{c}_{ijklmnop} = \sum_{abcdefgh} \alpha_{ia}\alpha_{jb}\alpha_{kc}\alpha_{ld}\alpha_{me}\alpha_{nf}\alpha_{og}\alpha_{ph}, \quad (30)$$

kde $\alpha_{ia} \div \alpha_{ph}$ jsou směrové kosiny úhlu natočení, které jsou pro Y -řezu určeny v tabulce 3. Jedná se tedy o otočení kolem elektrické osy X základního ortogonálního systému os.

Jak již bylo uvedeno v předcházejících částech, program pro transformaci nám nemůže spočítat konkrétní hodnotu elastického modulu. Proto byl tento program oproti programům pro výpočet efektivních hodnot tenzorů druhého a třetího řádu upraven na pouhý výčet nenulových násobků prvků základní tenzorové matice. V první verzi programu byly vypisovány všechny nenulové prvky transformované matice - výsledkem tedy stejně jako u elastických modulů druhého a třetího řádu celá matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu. Celý výstup byl však velmi nepřehledný a proto v konečné verzi vypisuje program výčet nenulových násobků prvků základní matice pouze pro jeden zvolený prvek matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu.

Celý program je postaven tak, že spočítá transformační rovnici pro libovolný úhel natočení Y -řezu (stejně jako je tomu zvykem u programů pro elastické moduly nižších řádů),

ale pouze pro jeden libovolný prvek matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu. Na obr. 3 je vidět vzorový výpis tohoto programu pro prvek \tilde{c}_{6666}^E , který nás zajímá. Tato efektivní hodnota je složena z 16 prvků základní matice tenzoru osmého řádu.



Obrázek 3: Okno programu pro výpočet efektivní hodnoty koeficientu tenzoru 8.řádu

Pro elastický modul čtvrtého řádu předpokládáme platnost stejných pravidel symetrie, která jsou uvedena např. v [24] Tím se nám počet prvků základní matice, které se svými váhovými poměry podílí na velikosti efektivní hodnoty hledaného prvku elastického modulu, redukuje. Výsledkem redukce vlivem symetrie pro námi hledanou efektivní hodnotu \tilde{c}_{6666} je následující rovnice

$$\tilde{c}_{6666}^E = A_1 c_{5555}^E + A_2 c_{5556}^E + A_3 c_{5566}^E + A_4 c_{5666}^E + A_5 c_{6666}^E \quad , \quad (31)$$

kde koeficienty A_1, A_2, A_3, A_4 a A_5 jsou váhovým zastoupením jednotlivých prvků matice elastického modulu čtvrtého řádu. Počet prvků základní matice tenzoru osmého řádu se nám tedy redukoval na pouhých 5 nezávislých prvků.

Dostali jsme tedy základní rovnici o 5 neznámých. Pokud dokážeme změřit hodnotu \tilde{c}_{6666}^E pro 5 různých Y - řezů, bude možno výpočtem určit 5 neznámých prvků základní matice elastických modulů čtvrtého řádu.

3.3 Metody pro určení nelineárního koeficientu γ

Pro určení nelineárního koeficientu γ jsme předpokládali použití dvou základních metod.

- vznik intermodulačního efektu
- závislost rezonanční frekvence na buzení

Pro určení základních prvků tenzorové matice elastického modulu osmého řádu je potřeba 5 různých Y - řezů. Přesto bylo vybráno 6 řezů, ze kterých by se po určení jejich efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu mělo dát dle vztahu (31) určit 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Šestý řez je brán jako kontrolní pro porovnání výsledku efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu vypočteného a naměřeného a zároveň pro možnost různých kombinací použitých naměřených hodnot pro výpočet a zjištění rozptylu takto určených hodnot v budoucnosti. V rozsahu předložené práce je porovnávacím řezem především AT -řez, pro nějž již byla hodnota efektivní hodnota \tilde{c}_{666}^E několikrát experimentálně určena. Bude tedy používán i pro specifikaci, zda je použitá měřicí metoda pro určení hodnoty nelineárního koeficientu γ vhodná a za jakých podmínek je nutno měření provádět.

Pro měření byly vybrány následující komerčně využívané Y -řezy : AT -řez, BT -řez, CT -řez, DT -řez, $Y90$ -řez a $Y67,5$ -řez.

Pro řezy rezonátorů se používá více typů označení. V tabulce 4 jsou shrnuty všechny typy označení pro použité řezy. V dalším textu budeme většinou používat komerční typ označení nebo označení výrobce (pokud komerční označení není zažito).

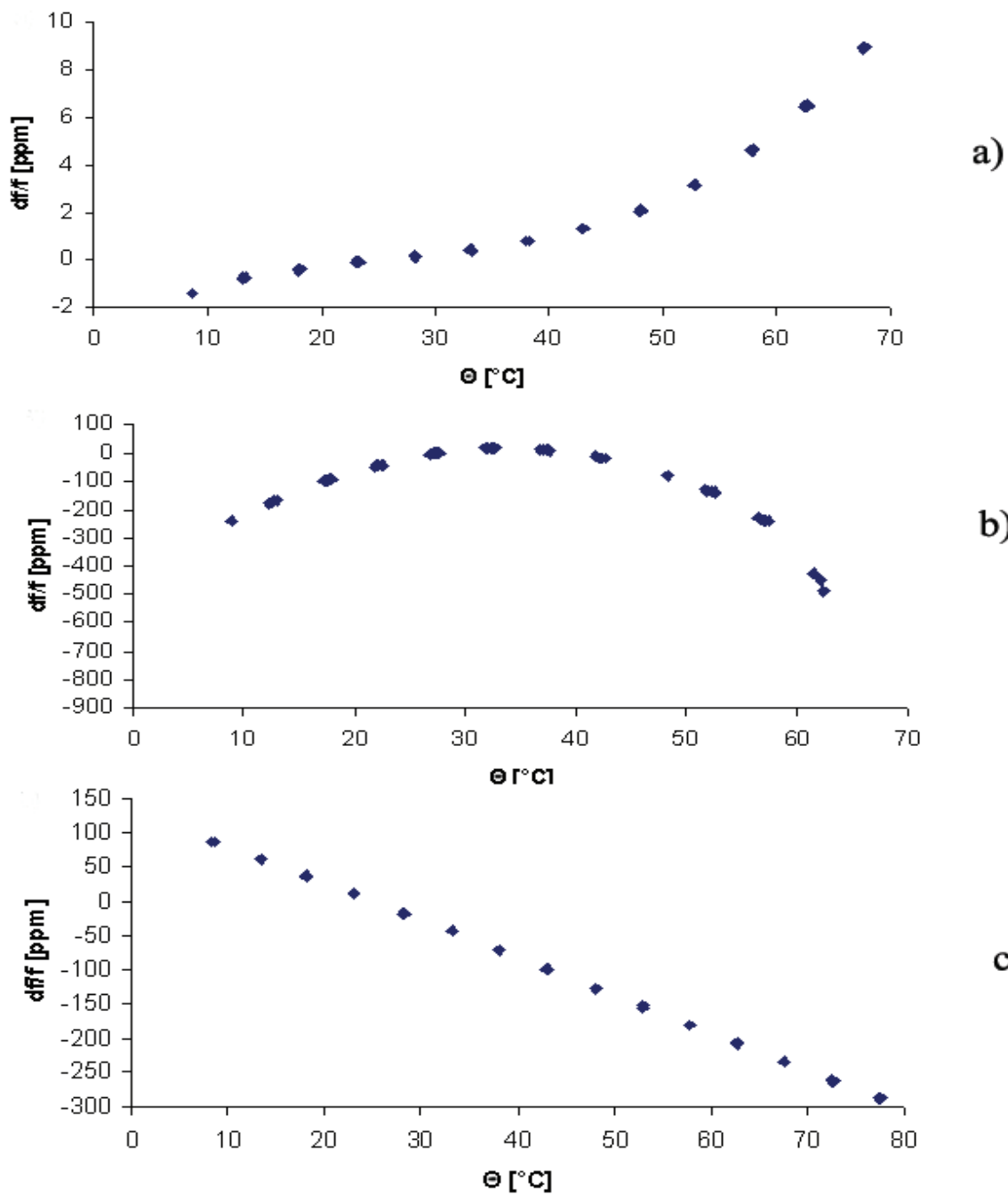
Tabulka 4: Označení řezů křemene

Natočení osy Y	$-36,25^\circ$	$-35,2^\circ$	$-22,5^\circ$	0°	$49,05^\circ$	$52,5^\circ$
Označení řezu výrobcem	$Y53,75$	$Y54,8$	$Y67,5$	$Y90$	$Y139,05$	$Y142,5$
Komerční označení	CT -řez	AT -řez			BT -řez	DT -řez

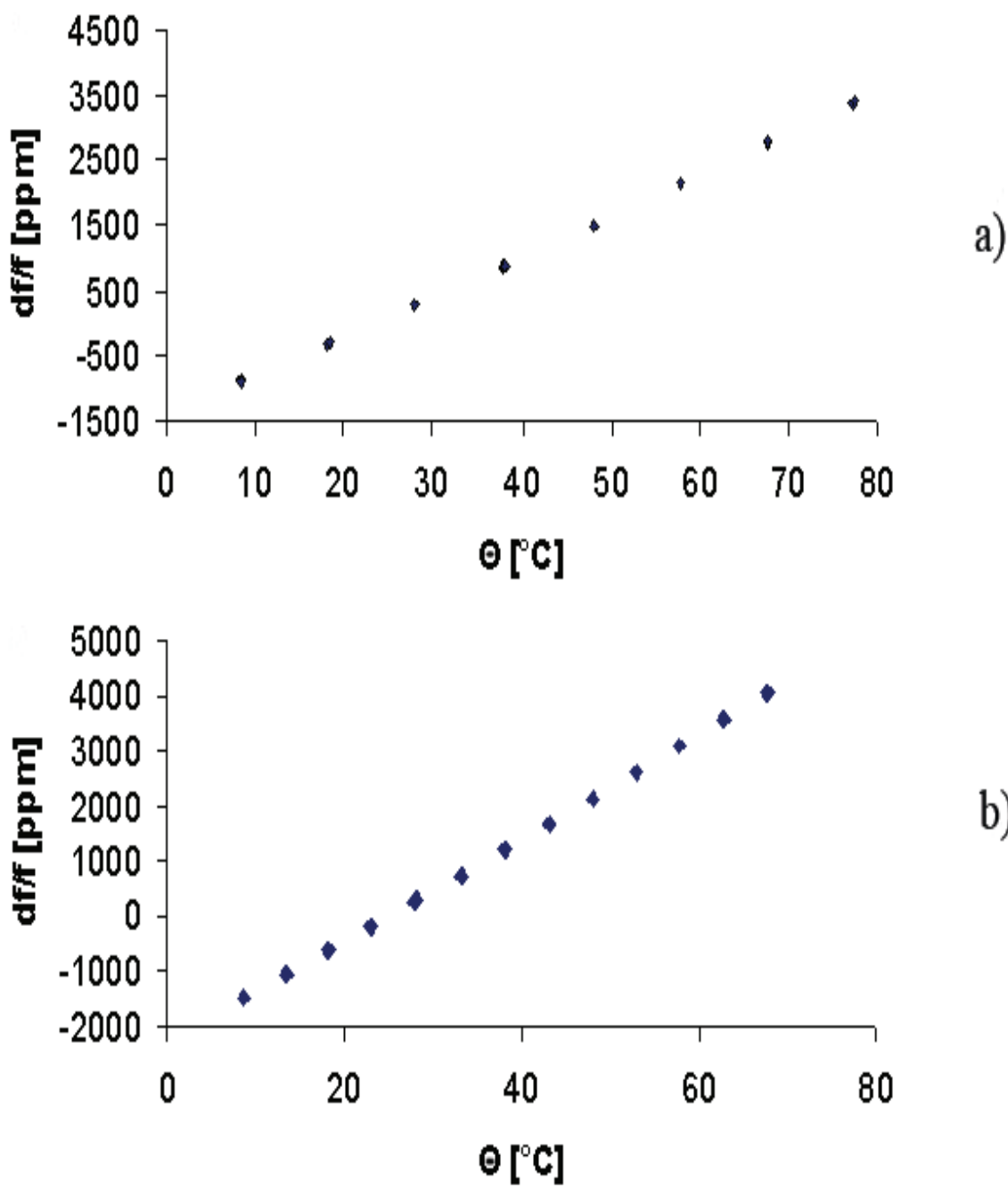
Negativní vlivy na všechny typy měření nelineárního koeficientu γ

Nelineární koeficient γ patří mezi nelineární jevy, které jsou velmi obtížně sledovatelné. Největším problémem, který brání přesnému měření všech slabších nelineárních vlivů, je již dříve popsáný vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Obě jmenované metody pro měření nelineárního koeficientu γ jsou ovlivněny teplotními závislostmi rezonančního kmitočtu.

Pro všechny použité piezoelektrické rezonátory jednotlivých Y -řezů je potřeba změřit teplotní závislost rezonančního kmitočtu a určit pásmo teplotní necitlivosti nebo bod



Obrázek 4: Teplotní charakteristiky a) *AT*-řez, b) *BT*-řez a c) *CT*-řez



Obrázek 5: Teplotní charakteristiky a) řez Y90 a b) řez Y67,5

obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu piezoelektrického rezonátoru, aby byl eliminován vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu v průběhu celé doby měření, který je velmi dominantní a zkresluje a tím znehodnocuje výsledky měření jiných typů nelinearity na piezoelektrických rezonátorech. Proto byly pro všechny piezoelektrické rezonátory jednotlivých Y -řezů změřeny teplotní závislosti v oblasti teplot, které lze na použité teplotní komoře nastavit. Na obrázku 4 jsou postupně teplotní charakteristiky AT -řezu, BT -řezu a CT -řezu a na obrázku 5 jsou teplotní charakteristiky řezu $Y90$ a řezu $Y67,5$.

Jak je z těchto charakteristik vidět, jsou především řezy $Y90$ a $Y67,5$ velmi teplotně závislé a v intervalu teplot nastavitelných na měřicí komoře je jejich teplotní závislost téměř lineární. Řez CT má také téměř lineární teplotní závislost v oblasti normálních teplot, ale změna rezonanční frekvence je ve srovnání s řezy $Y90$ a $Y67,5$ téměř nevýrazná. U řezu BT je v rozsahu teplotní komory možno najít bod obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu a dá se předpokládat, že při měření v okolí tohoto bodu bude vliv teplotní závislosti především elastických vlastností piezoelektrického rezonátoru minimalizován. Teplotní závislost AT - řezu byla podrobněji probrána v předchozím oddíle.

Intermodulační metoda

Jestliže jsou dva harmonické signály s amplitudami V_1 a V_2 a kmitočty ω_1 a ω_2 rovnoměrně rozloženy kolem rezonančního kmitočtu rezonátoru ω_N a zároveň působí současně, vzniká v důsledku nelineárních elastických vlastností rezonátoru prostřednictvím piezoelektrického jevu intermodulační signál o napětí V_Ω a úhlovém kmitočtu Ω , jehož velikost získáme ze vztahu

$$\Omega_1 = 2\omega_1 - \omega_2 \quad (32)$$

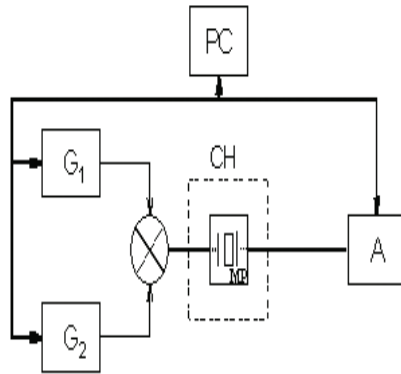
Tohoto jevu lze využít k zjištění nelineárních elastických vlastností piezoelektrického materiálu, ze kterého je rezonátor vyroben. Protože se vždy jedná o určitý úhel řezu piezoelektrickým materiálem, zjišťujeme tedy pouze efektivní hodnoty elastických vlastností, které se na jevu podílí. Odvození vzorců pro stanovení elastických vlastností je uvedeno dále a je odvozeno z použitého měřicího řetězce.

Pro měření byl vytvořen měřicí řetězec, který je zobrazen na obrázku 6. V řetězci byly použity dva identické generátory HP 33120A s frekvenčním rozsahem $0,1 \div 13 \text{ MHz}$ s amplitudou harmonického signálu do $23,95 \text{ dBm}$, teplotní komora Saunders 4220 a Network/Spectrum analyzátor HP 4195A, který je možno použít pro měření frekvencí až do 500 MHz v úrovních signálů $-9 \div +20 \text{ dBm}$.

Pro intermodulační napětí po zavedení zjednodušujících konstant tedy platí

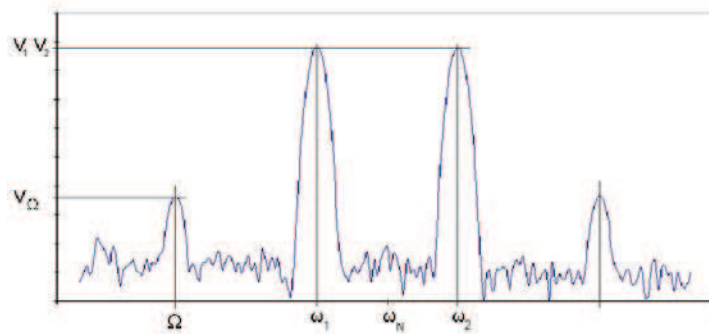
$$\hat{V}_\Omega = \frac{-RA_{1\Omega}^2 A_{23} A_4 + jRA_{1\Omega} A_4}{1 + R^2 A_{1\Omega}^2 A_{23}^2} \quad (33)$$

kde hodnoty jednotlivých parametrů jsou uvedeny v [26].



Obrázek 6: Zapojení přístrojů v měřicím řetězci

Komplexní hodnota intermodulačního napětí měřicího obvodu je uvedena v [15] a [26].



Obrázek 7: Průběh amplitud výstupního signálu obvodu pro měření intermodulace

Na obrázku (7) je zobrazen celý spektrální průběh amplitud výstupního signálu obvodu a jsou zde i názorně ukázány výše uvedené amplitudy V_1 , V_2 a V_Ω a kmitočty ω_1 , ω_2 , ω_N a Ω .

Protože pro výpočet nelineárního koeficientu γ je do vzorce nutno zadat mnoho změřených nebo vypočtených hodnot, bylo pro měření využito několik měřicích pracovišť.

Pro celkový výpočet byl opět vytvořen program v jazyce Delphi, který ze zadaných hodnot počítá hledaný koeficient γ . Na obr. (8) je vidět, že pro výpočet je potřeba zadat skutečně velké množství hodnot. To do celého procesu výpočtu zanáší velkou nejistotu měření, která není žádoucí pro co nejpřesnější určení nelineárního koeficientu γ . Podívejme se tedy podrobněji na přesnost daného měření.

C6666				
Typ rezonátoru (úhel natočení)		-35,20000	°	
Harmonická	N	1		
Rezonanční kmitočet	ω_N	10000053,0	Hz	
Plocha elektrod	Se	12,56637061436	mm ²	
Intemodulační frekvence	Ω	9999755,0	Hz	
Budící kmitočet	ω_1	9999955,0	Hz	
	ω_2	10000155,0	Hz	
Buzení	V ₁	5,0	dBm	
	V ₂	5,0	dBm	
Intermodulační odezva	V _{Ω}	-48,5147	dBm	
Impedance rezon. při Ω	Z	50,89	Ω	
	φ	-1,3354	rad	
	při ω_1	Z	20,04	Ω
		φ	-0,9572	rad
	při ω_2	Z	20,29	Ω
		φ	1,0012	rad

Výpočet	Uložit Log do souboru	Vymazat Log
---------	-----------------------	-------------

A1o	: 1.21594143217937E-0004	
A2o	: 1.07298868400775E+0002	
A3o	: 3.72454087546665E-0006	
A3o	: 4.89995742654971E-0013	
Z omega	: 7.66464776412667E+0001	
gama re	: -1.86988666236003E+0011	N m ⁻²
gama im	: 2.81627483313580E+0011	j N m ⁻²
gama	: 3.38051476343855E+0011	N m ⁻²
ct6666	: 1.28052232173727E+0012	N m ⁻²

Obrázek 8: Okno programu pro výpočet nelineárního koeficientu γ

Přes všechny negativní vlivy, které byly výše vzpomenuty, jsme pro AT - řez při měření v oblasti teplotní necitlivosti došli k srovnatelnému výsledku s dříve publikovanými v pracích [15], [17], a metoda se zdála použitelná i pro další Y - řezy.

Vliv měřicího řetězce na vypočtenou hodnotu i vliv mezivýpočtů byl již ukázán. Dalšími negativními vlivem je teplotní závislost rezonančního kmitočtu. Nejprve se podíváme na teplotní charakteristiky uvedené na obr. (4 a 5). Mimo AT -řezu a BT - řezu není možno pro ostatní zvolené Y - řezy najít pásmo nebo bod teplotní necitlivosti. Vzhledem k tomu, že je celý proces měření poměrně dlouhý (řádově desítky minut), dochází k velkému lokálnímu ohřevu piezoelektrického rezonátoru vlastním mechanickým pohybem piezoelektrické destičky rezonátoru. Přesto jsme se o to pokusili a snažili jsme se udržet teplotu v průběhu měření konstantní.

V tabulce 5 jsou uvedeny celkové výsledky měření koeficientu γ pomocí intermodulační metody. Přestože výsledky vypadají adekvátně a především u řezů $Y90$ a $Y67.5$ jsou i s poměrně malým rozptylem, nevypovídají o nelineárním koeficientu γ . Všechny jsou

zatíženy velmi velkou chybou způsobenou teplotní závislostí jednotlivých řezů.

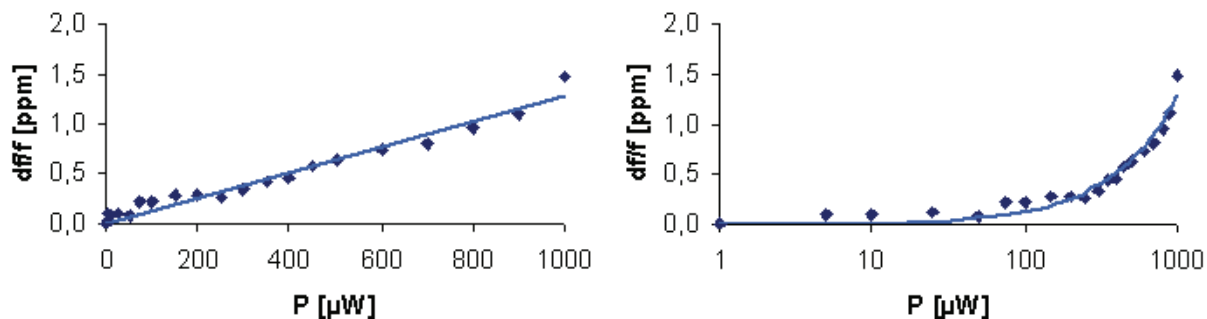
Tabulka 5: Vypočtené hodnoty koeficientu $\gamma[Nm^{-2}]$

Úhly řezu	$-36,25^\circ$	$-35,2^\circ$	$-22,5^\circ$	0°	$49,05^\circ$	$52,5^\circ$
Rez. č.1	$1,13 \cdot 10^{10}$	$1,84 \cdot 10^{11}$	$7,11 \cdot 10^{10}$	$9,16 \cdot 10^{10}$	$2,06 \cdot 10^{11}$	$5,50 \cdot 10^{11}$
Rez. č.2	$6,02 \cdot 10^9$	$2,74 \cdot 10^{11}$	$6,77 \cdot 10^{10}$		$1,76 \cdot 10^{11}$	$5,83 \cdot 10^{11}$
Rez. č.3	$5,14 \cdot 10^9$	$3,28 \cdot 10^{11}$	$7,25 \cdot 10^{10}$	$5,98 \cdot 10^{10}$	$1,70 \cdot 10^{11}$	$4,97 \cdot 10^{11}$
Rez. č.4		$4,26 \cdot 10^{11}$	$6,23 \cdot 10^{10}$	$1,62 \cdot 10^{11}$	$1,56 \cdot 10^{11}$	$5,45 \cdot 10^{11}$
Rez. č.5		$2,19 \cdot 10^{11}$	$6,14 \cdot 10^{10}$	$1,18 \cdot 10^{11}$		$5,03 \cdot 10^{11}$
$\varnothing D$ [mm]	13,95	9	9	9	13,95	13,95
$\varnothing d$ [mm]	7	4	4	4	7	7

kde $\varnothing D$ je \varnothing rezonátoru a $\varnothing d$ je \varnothing elektrody.

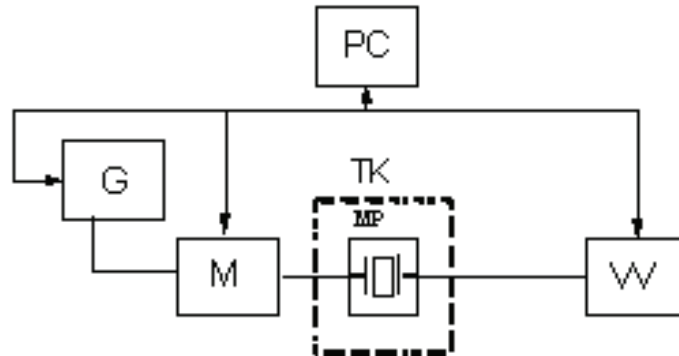
Protože se nepodařilo přijít na způsob, jak teplotní závislost rezonančního kmitočtu v průběhu dlouhého měření eliminovat, bylo od této metody ustoupeno.

Vliv budicího napětí



Obrázek 9: Závislost df/f na příkonu P a) lineární osa x b) logaritmická osa x

Dalším způsobem, kterým je možno určit nelineární koeficient γ , je vliv budicího napětí. Jak již bylo uvedeno dříve, je vliv budicího napětí na rezonanční kmitočet vysvětlován nelineárními závislostmi elastických vlastností piezoelektrických látek a je tedy specifikován pomocí nelineárního koeficientu γ . Jedná se o měření sériové rezonanční frekvence při stálé teplotě okolí, kdy se mění úroveň budicího napětí. Toto měření není oproti měření intermodulace tak časově náročné, jedna hodnota je při známé výrobce udané rezonanci cca 2 min.



Obrázek 10: Měřicí řetězec pro měření závislosti $\Delta f/f$ na budícím napětí

TK - teplotní komora

M - multiplexer

G - generátor

VV - vektorového voltmetru

MP - obvodu s π -články

PC - řídicího PC

Výsledkem takovéto naměřené závislosti je jak bylo např. ukázáno v [2] závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(I^2)$. V dnešní době se ale spíše používá závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(P)$, ve dvou variantách. S osou x v lineárních souřadnicích viz. obr. 9 a) a logaritmických souřadnicích viz. obr. 9 b). Jak je z proložených křivek s naměřenými hodnotami zřejmé, tato závislost je čistě lineární. Pro obě závislosti je nutno určit velikost proudu I_r , který rezonátorem při rezonanci protéká a pro závislost na budícím příkonu je nutno určit velikost elektrického odporu R_h při rezonanční frekvenci a z nich pak příkon P_r .

Závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(P)$ je tedy čistě lineární a vztah můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\Delta f}{f} = AP, \quad (34)$$

kde A je směrnici přímky závislosti změny rezonančního kmitočtu na příkonu.

Pro tuto závislost Tiersten ve své práci [6] pro destičky rezonátorů kmitajících tloušťkově - střižnými kmity odvodil vztah

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{9\sqrt{2}}{32} \frac{\gamma\rho}{\pi^2\eta n\bar{c}^{3/2}R_e^{1/2}(M_nP_n)^{1/4}\sqrt{h}} \cdot P, \quad (35)$$

kde η označuje hodnotu ztrátového tření, která je považována za nezávislou na frekvenci a je rovna $\eta = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-2}\text{s}$, plocha rezonátoru je dána vztahem $2\pi r_r^2$ a plocha elektrod

vztahem $2\pi r_e^2$. M_n a P_n jsou hodnoty nelineárních rovnic uvedených ve 2.kapitole.

Pro měření byl vytvořen měřicí řetězec, který je zobrazen na obr. 10 včetně popisu jednotlivých částí tohoto měřicího řetězce. Měřicí řetězec umožňuje měřit celou sérii rezonátorů tj. všechny rezonátory stejného řezu) na jedné nastavené teplotě.

I pro toto měření předpokládáme vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Tato závislost je experimentálně zjištěna. Na obr. 11 a) jsou zobrazena naměřená data závislosti změny rezonančního kmitočtu na budicím výkonu a na teplotě pro BT - řez proložená regresními přímkami. Jako nominální křivku vezmeme lineární regresi při bodu obratu $\Theta = 34^\circ C$. Teploty nižší než tato teplota leží na rostoucí křivce teplotní závislosti a proto jsou i lineární regrese naměřených dat ovlivněny pozitivně. Směrnice těchto tečen jsou větší než směrnice nominální přímky. Teploty vyšší než $34^\circ C$ leží na klesající křivce teplotní závislosti a proto dochází k opačnému jevu. Směrnice lineárních regresí jsou ovlivněny negativně, tj. jsou menší než směrnice nominální regresní přímky.

Pro CT - řez jsou naměřená data a odpovídající regresní přímky zobrazeny na obr. 11 b). Vzhledem k měření na BT - řezu se dá předpokládat, že teplotní závislosti rezonančního kmitočtu CT - řezu ovlivňuje nominální křivku závislosti $\Delta f/f = f(P)$ negativně.

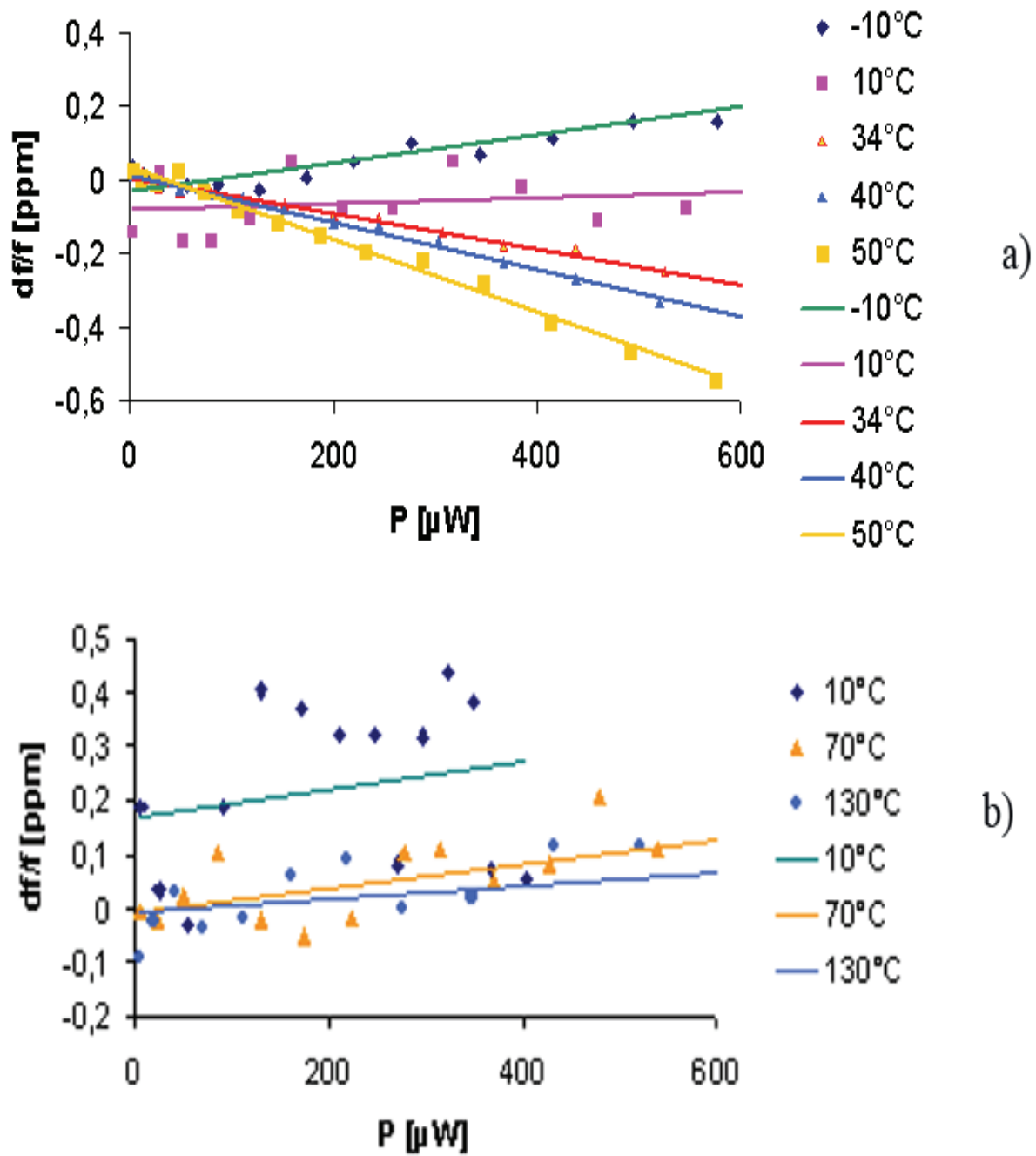
Na obr. 12 a) je pro $Y67$ - řez vidět, že naměřená data mají oproti předchozím měřením skutečně velký vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Teplotní závislost f leží na rostoucí křivce a proto je vliv na směrnice regresních přímek pozitivní.

Data na obr. 12 b) jsou pro $Y90$ - řez a jsou obdobná jako u řezu $Y67$, jen díky téměř dvojnásobné teplotní závislosti f jsou regresní přímky napětové závislosti téměř rovnoběžné.

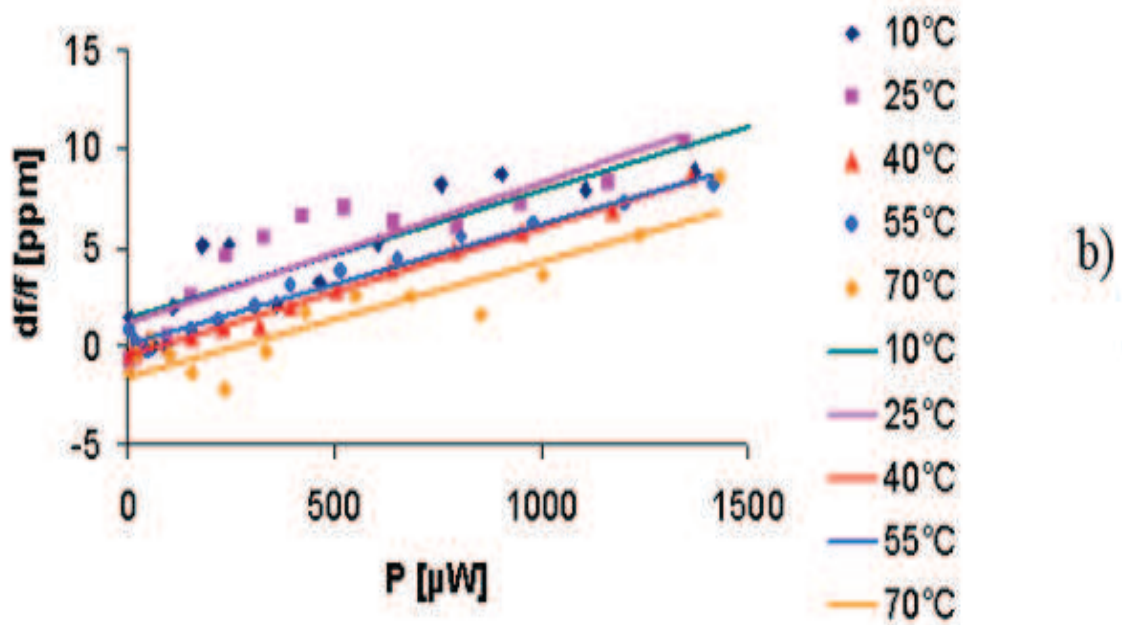
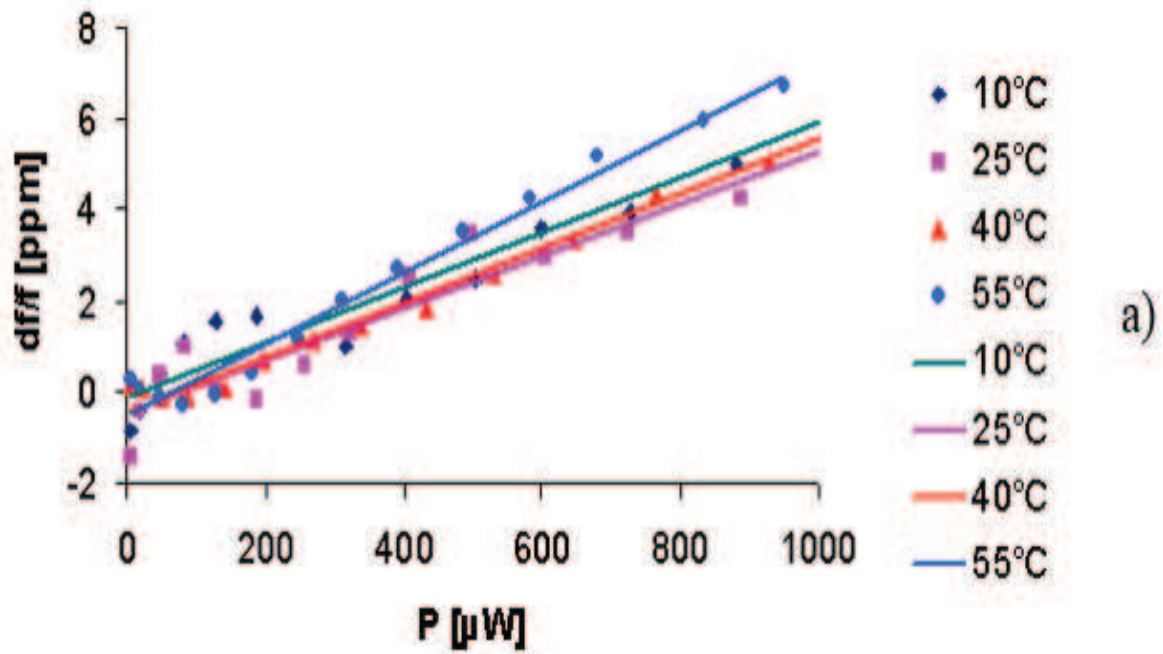
Z výsledků tedy budeme porovnávat směrnice průběhů měření závislosti rezonanční frekvence na budicím výkonu a pro výpočet směrnice regresní přímky budeme používat pouze program MS Excel. V tabulce 6 jsou shrnuty směrnice pro použité řezy rezonátorů.

Tabulka 6: Směrnice A_2 regresních přímek závislosti $df/f = f(P)$

Úhly řezu	$-36,25^\circ$	$-22,5^\circ$	0°	$49,05^\circ$	
$-10^\circ C$				3,757	$10^{-4} W^{-1}$
$10^\circ C$	2,669	60,59	64,86	0,813	
$25^\circ C$		56,72	71,77		
$34^\circ C$				-4,859	
$40^\circ C$		59,65	64,83	-6,427	
$55^\circ C$		77,93	60,44	-9,863	
$70^\circ C$	2,247		58,43		
$130^\circ C$	1,226				



Obrázek 11: Závislost f na P - Y-řezy a) BT - řez, b) CT - řez



Obrázek 12: Závislost f na P - Y -řezy a) řez $Y_{67,5}$ a b) řez Y_{90}

Z naměřených dat pro všechny uvedené řezy je jasné, že BT - řez půjde použít pro modelování a bližší zkoumání korelace mezi teplotní závislostí rezonančního kmitočtu a budicím výkonem. Proto v konečné tabulce výsledků měření závislosti rezonančního kmitočtu na budicím výkonu jsou zcela vypovídající jen směrnice BT - řezu při měřených teplotách, které se dají použít pro přesnou kvantifikaci korelace teplotní závislosti rezonančního kmitočtu a závislosti rezonančního kmitočtu na buzení. Pro tuto korelaci bude nutno stanovit další vlivy, které ji mohou ovlivnit, což je především doba měření jednotlivých bodů závislosti a také odpor rezonátoru, a z nich poté odvodit lokální ohřev středu desky rezonátoru, kde je pohyb největší a dále přesun tepla po elektrodách a proti tomuto ohřevu působící přenos tepla z teplotní komory.

Závěr

Pro studium nelineárních vlastností piezoelektrických látek se předpokládá, že jejich původcem jsou nelineární vlastnosti elastických koeficientů resp. modulů. V práci jsem se věnovala pouze křemenných Y -řezům. Byly popsány obecné rovnice pro teplotní závislost křemenných destiček Y -řezů kmitajících tloušťkově-střižnými módy kmitů.

Nově byla pro Y -řezy odvozena a prezentována rovnice pro výpočet efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu, která po využití symetrie pro krystalickou třídu 32 vedla k závěru, že na její hodnotu má vliv pouze 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu a pokud by se povedlo měřením určit 5 efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu, je možno určit 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu.

Díky silnému vlivu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu se rezonanční kmitočet mění a proto je problém udržet rezonanční kmitočet uprostřed mezi budicími signály. Rovnoměrné rozložení budících signálů kolem rezonančního kmitočtu je základní podmínka vzniku intermodulačního produktu, jehož hodnotu je pro určení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu třeba přesně změřit. Protože se nepodařilo najít metodu, kterou by se podařilo udržet rezonanční kmitočet mezi dvěma budicími signály, byla intermodulační metoda vyhodnocena jako nevhodná.

Závislost rezonančního kmitočtu na úrovni buzení piezoelektrického rezonátoru je pro přesné vyhodnocení vlivu zatížení korelací mezi zkoumaným jevem a teplotní závislostí rezonančního kmitočtu piezoelektrického rezonátoru. Tuto korelaci se podařilo identifikovat a její vliv dokumentovat. Tato metoda se tedy jeví jako skutečně použitelná pro stanovení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu. Daný jev tedy bude dále zkoumán, budou provedena měření, kde bude přesně stanovena doba zatížení piezoelektrického rezonátoru a z ní se pak pokusíme tento vliv eliminovat jako systematickou chybu měřicí metody.

Celý postup měření ukázaný zde na křemenu bude pak dále možno beze změny rovnic použít na všechny piezoelektrické látky krystalizující ve stejné soustavě jako křemen tj např. langasit a langatit. Při stanovení 5 základních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu pak bude možno modelovat velikost nelineárního koeficientu γ a pokusit se stanovit takové Y -řezy křemene, které budou mít tento koeficient nulový, což by znamenalo i nulovou závislost piezoelektrického rezonátoru na budícím napětí.

Reference

- [1] Cady, W.G.: *The piezoelectric Resonators* Proc. I. R. E., Vol.10 (1922), str. 83-114
- [2] Zelenka, J.: *Piezelektrické rezonátory a jejich využití* Academia Praha, 1984.
- [3] Yang, J. S.: *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity* New York: Springer, 2005.
- [4] Alexandrov, K.S., Kokorin, J.I., Zajceva, M.P.: *Relations between the nonlinear electromechanical coefficients of the piezoelectric matter* Kristallografia, vol.22, pp.1266-1267, 1977. (v ruštině)
- [5] Hruška, K.: *An attempt at a phenomenological interpretation of the influence of a polarizing field on piezoelectric resonators* Czech J.Phys., vol. B11 p.150, 1961, and vol. B12, pp.338-343, 1962.
- [6] Tiersten, H. F. : *Analysis of nonlinear resonance on thickness shear and trapped-energy resonators*, J. Acoust. Soc. Amer. 59, pp. 866, 1976.
- [7] Kittinger, K., Tichý, J.: *Electroelastic effect of crystal rods expressed by fundamental material constants* J.Acoust.Soc.Am. vol. 83, 2, pp. 647-651, 1988.
- [8] Gagnepain, J.J., Besson, R.: *Nonlinear effects in piezoelectric quartz crystals* Physical Acoustics, vol.XI, W.P.Mason, R.N.Thurston, Eds. New York: Academic, pp.245-288. Proc. 41st Annual Frequency Control Symposium (1987), str. 266-276, 1975.
- [9] Yang, J. S., Zhang, X.: *Extensional vibration of a nonuniform piezoelectric rod and high voltage generation* Int. J. Appl. Electromagn. Mechan., vol.16, pp.29-42, 2002.
- [10] Hu, T.Y., Chen, C.Y., Yang, X.H., Du, Q.D., Cui, Z.J.: *Electric energy transmission between two piezoelectric transducers* Acta Mechanica Solida Sinica, vol.24, pp.304-312, 2003.
- [11] Yang, J. S., Guo, S.H.: *Thickness-twist modes in a rectangular piezoelectric resonator of hexagonal crystals* Appl.Phys.Lett., vol. 88, art no.153506, 2006.
- [12] Nakanuta, K.: *Elastic wave energy-trapping and its application to piezoelectric device* Electronics and Communications in Japan (Part II:Electronics), vol.27, pp.30-39, 2007.
- [13] Yang, J. S., Xue, H., Fang, H., Hu, Y., Wang, J., Shen, L.: *Effects of electrodes with varying thickness on energy trapping in thickness-shear quartz resonators* IEEE Trans., Ultrason., Ferroelect., Frequency Control, vol.54, No.4, pp.892-895, 2007.
- [14] Nosek, J.: *Nelineární elektrický náhradní obvod piezelektrického rezonátoru* Slaboproudý obzor, vol.46, no.3, pp. 133-137, 1984.

- [15] Nosek, J.: *Měření intermodulace křemenných rezonátorů typu AT* Československý časopis pro fyziku (A), vol. 35, pp. 143-148, 1985.
- [16] Nosek, J.: *SAW propagation in the two domain states of ferroelectric LiNbO₃ crystal* Proc. 2004 Joint 50th Anniversary IEEE International UFFC Symposium, Ultrasonics Symposium, August 23-27, Montréal, CA, pp.1565-1568, 2004.
- [17] Tiersten, H. F.: *Analysis intermodulation in thickness shear and trapped-energy resonators*, J. Acoust. Soc. Amer. 57, pp. 667, 1976.
- [18] Lee, P.C.Y., Nikodem, Z.: *An approximate theory for high-frequency vibrations of elastic plate*, Int. J.Solids Structures 8, pp. 581-612, 1972.
- [19] Lee, P.C.Y.; Yong, Y.K.: *Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations* J. Appl. Phys. 60, pp. 2327-2341, 1986.
- [20] Wang, J.: *The frequency-temperature analysis equations of piezoelectric plates with Lee plate theory* Proc. IEEE International Frequency Control Symposium, Orlando, Florida, pp. 677-681, 1997.
- [21] Mindlin, R.,D.: *Third overtone quartz resonator* Int. J. Solids Structure, **18**, pp. 809-827, 1982.
- [22] Lee, P.C.Y.; Syngellakis, S.; Hou, J.P.: *A two dimensional theory for high-frequency vibrations of piezoelectric crystal plates with or without electrodes* J. Appl. Phys. 61, pp. 1249-1262, 1987.
- [23] Tiersten, .: *Analysis of trapped-energy resonators operating in overtones of coupled thickness shear and thickness twist* J. Acoust. Soc. Amer. 59, pp. 879-888, 1976.
- [24] Brdička, M.: *Mechanika kontinua* Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.

Vlastní publikace

- [25] Kretschmerová, L, Richter, A, Nosek, J.: *The nitrogen cryostat for piezoelectric devices measurement*, Proc. 3rd International Workshop on ECMS97, 997, Toulouse, France, pp. 208-213, 1997.
- [26] Nosek, J., Kretschmerová, L., Kretschmer, P.: *Determination of high-order constants using the resonant and laser interferometry methods* Proc. Joint Meeting of the 12th EFTF, Warsaw, Poland, vol.2, pp.72-76, 1998.
- [27] Zelenka, J.; Kretschmerová, L.: *Relation between the frequency - temperature dependence of the fundamental and third harmonic of AT - cut quartz plates* International Symposium on Surface Waves in Solid and Layered Structures, Russia, 1998.
- [28] Nosek, J., Kretschmerová, L., Kretschmer, P.: *Contribution to the Determination of High order Elastic Stiffnesses from Measurement of BT-cut Quartz Resonators* Proc. Joint Meeting of the 13th EFTF and 1999 IEEE IFCS, France, vol.2, pp.746-749, 1999.
- [29] Kretschmerová, L., Kretschmer, P. : *Measuring and evaluation of characteristics quartz piezoelectric crystals* Proc. 4th International Workshop on ECMS99, Liberec, Czech Republic, pp. 47-50, 1999.
- [30] Mateescu I., Nosek J., Kretschmerova L., Tsoi E., Manea A.: *Frequency-temperature characteristic of the plan-parallel langasite resonators* Proc.15th European frequency and time forum, Neuchatel, Switzerland, 2001.
- [31] Kretschmerová L., Boy J.J., Bourquin R.: *Characterisation of LD-cut resonators operating in anharmonic modes* Proc.16th European frequency and time forum, Sant Petersburg, Russia, 2002.